

**ESTIMAÇÃO DE MODELOS DE
VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA
USANDO MÉTODOS DE
VEROSSIMILHANÇA
EMPÍRICA/MÍNIMO CONTRASTE
GENERALIZADOS**

MÁRCIO POLETTI LAURINI



Copyright Insper. Todos os direitos reservados.

É proibida a reprodução parcial ou integral do conteúdo deste documento por qualquer meio de distribuição, digital ou impresso, sem a expressa autorização do Insper ou de seu autor.

A reprodução para fins didáticos é permitida observando-se a citação completa do documento

ESTIMAÇÃO DE MODELOS DE VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA USANDO MÉTODOS DE VEROSSIMILHANÇA EMPÍRICA/MÍNIMO CONTRASTE GENERALIZADOS

MÁRCIO POLETTI LAURINI
LUIZ KOODI HOTTA

RESUMO. Neste artigo discutimos a estimação de modelos de Volatilidade Estocástica usando métodos de Verossimilhança Empírica/Mínimo Contraste Generalizados. Mostramos por meio de simulações de Monte Carlo que os métodos propostos tem desempenho superior ou equivalente aos demais métodos de estimação propostos da literatura de estimação de modelos de volatilidade estocástica, e adicionalmente possuem propriedades de robustez na presença de problemas de especificação como distribuições com caudas pesadas e presença de outliers.

1. INTRODUÇÃO

A medição da volatilidade de ativos é um aspecto fundamental em finanças. Medições precisas da volatilidade nos retornos de ativos financeiros são necessárias em aspectos como gerenciamento de risco ((MCNEIL; FREY; EMBRECHTS, 2005)) e precificação de ativos ((SINGLETON, 2006)). Entre as formas disponíveis para a modelagem da volatilidade se destaca a classe de modelos conhecida como modelos de volatilidade estocástica¹. Nesta classe de modelos a volatilidade é tratada como um fator latente não observado. Modelos de volatilidade estocástica são atrativos já que podem ser derivados de difusões em tempo contínuo (e.g. (BARNDORFF-NIELSEN; NOCLATO; SHEPHARD, 2002)), e assim se tornam mais próximos à literatura de precificação usando não-arbitragem/martingales.

Estes modelos também são atrativos já que existem evidências empíricas que estes modelos capturam melhor fatos estilizados de séries financeiras e possuem desempenho preditivo superior a outras classes de modelos de volatilidade (e.g. (KOOPMAN; JUNGBACKER; HOL, 2005)), como por exemplo a classe de modelos GARCH ((ENGLE, 1982; BOLLERSLEV, 1986)). Entretanto como a volatilidade é tratada como um processo latente não-observável, a estimação de modelos de volatilidade é mais complicada que a de modelos concorrentes, como por exemplo a classe GARCH em que a volatilidade é uma função determinística do passado, o que permite construir e avaliar a função de verossimilhança de forma simples.

Em modelos de volatilidade estocástica a avaliação exata da função de verossimilhança, devido a presença do fator latente volatilidade, exige o cálculo de uma integral com dimensão equivalente ao tamanho da amostra. A avaliação numérica deste problema exige métodos baseados em simulação, como métodos de importance sampling (e.g. (GEWEKE, 1994), (LIESENFELD; RICHARD, 2003)) ou Markov Chain Monte Carlo ((SHEPHARD, 1993), (JACQUIER; POLSON; ROSSI, 1994)). Embora estes métodos sejam eficientes e com o poder computacional disponível atualmente bastante factíveis, ainda existem problemas como a determinação de uma função de importância apropriada ou o problema de correlação nas cadeias na amostragem por MCMC. Também é possível trabalhar com aproximações da função de verossimilhança, como a estimação por Quasi-Máxima Verossimilhança ((HARVEY; E.; SHEPHARD, 1994), (JUNGBACKER; KOOPMAN, 2009)), baseada em uma linearização do modelo de volatilidade estocástica e nesta metodologia a avaliação da função de verossimilhança é realizada por meio de uma decomposição do erro de predição usando o Filtro de Kalman, o que rende um estimador consistente, assintoticamente Gaussiano porém viesado em amostras finitas e ineficiente.

Outras formas de avaliar este modelo utilizam a estimação através da calibração por simulação das estimações baseadas em um modelo auxiliar, utilizando os métodos de Inferência Indireta e o Método de Momentos Eficientes ((GOURIEROUX; MONFORT; RENAULT, 1993), (GALLANT; TAUCHEN, 1996)). Estes dois métodos são assintoticamente eficientes, possuem boas propriedades em amostras finitas ((MONFARDINI, 1998)) mas são menos eficientes que os métodos de Markov Chain Monte Carlo de (SHEPHARD, 1993) e (JACQUIER; POLSON; ROSSI, 1994). A forma mais simples de estimação para modelos

¹Para uma revisão de métodos de estimação de modelos de volatilidade estocástica veja por exemplo (BROTO; E., 2004), (GHYSELS; HARVEY; RENAULT, 1996), (SHEPHARD; ANDERSEN, 2009) e (JUNGBACKER; KOOPMAN, 2009).

de volatilidade é o uso de método de momentos, a forma original de estimação empregada na estimação do seminal modelo log-normal de volatilidade estocástica proposta por (TAYLOR, 1986).

Esta metodologia foi então refinada por (MELINO; TURNBULL, 1990) através do uso do Método de Momentos Generalizados (Generalized Method of Moments - GMM) de (HANSEN, 1982), que gera estimadores consistentes e assintoticamente gaussianos e eficientes. Estes estimadores são computacionalmente simples, mas suas propriedades em amostras finitas podem ser pobres e são ineficientes frente a estimadores baseados em Markov Chain Monte Carlo. Um estudo compreensivo das propriedades destes estimadores pode ser encontrado em (ANDERSEN; SORENSEN, 1996), e um *survey* completo sobre estimação de modelos de volatilidade estocástica usando método de momentos pode ser encontrado em (RENAULT, 2009).

O desempenho dos estimadores de modelos de volatilidade estocástica utilizando Métodos de Momentos Generalizados é prejudicado por uma característica existente na estimação por este método, que é a fato que o viés do estimador GMM cresce com o número de condições de momentos (e.g. (NEWHEY; SMITH, 2004)), e ao mesmo tempo a estimação eficiente com este método depende de uma escolha adequada das condições de momentos. O estimador GMM consegue alcançar a eficiência do estimador de máxima verossimilhança se um dos momentos é a função escore do estimador de máxima verossimilhança ou então os momentos utilizados projetam esta função. Na prática a estimação eficiente por GMM envolve utilizar um número elevado de condições de momentos. Como o viés em amostras finitas do estimador GMM é proporcional ao número de momentos utilizados, existe um trade-off entre viés e variância na estimação por GMM quando são utilizados um número elevado de condições de momentos.

Outro problema na estimação de modelos de volatilidade estocástica por GMM está na falta de robustez das condições de momentos utilizadas. A estimação do modelo log-normal de volatilidade estocástica está baseado em condições que utilizam momentos de ordens superiores, o que pode ser um problema grave na presença de outliers ou processos de inovação com caudas pesadas. Nesta situação os outliers existentes na amostra são elevados a potências de ordem 3 ou 4, o que afeta de forma significativa a estimação em amostras finitas.

Outro problema está na formulação das condições de momentos. Embora o estimador GMM seja semi-paramétrico e desta forma não é necessário especificar a função de distribuição do processo, a formulação das condições de momentos para modelos de volatilidade estocástica normalmente utiliza momentos derivados da especificação de uma função de distribuição para as inovações, como no chamado modelo log-normal de volatilidade estocástica de (TAYLOR, 1986). Se este pressuposto não é válido, as propriedades do estimador GMM podem ser prejudicadas.

Desta forma a implementação computacionalmente mais simples do método de momentos generalizados leva a um estimador com propriedades pobres em amostras finitas ((ANDERSEN; SORENSEN, 1996)), e a implementação de estimadores eficientes como os métodos baseados em MCMC são computacionalmente intensivas e sujeitas a problemas de convergência. Neste artigo propomos uma forma alternativa de estimação utilizando métodos semi-paramétricos de Verossimilhança Empírica Generalizada e Mínimo Contraste Generalizado. Estes métodos, como será demonstrado no artigo, representam uma forma computacionalmente mais simples de ser implementada, já que podem ser baseados nas mesmas condições de momentos que os estimadores de métodos de momentos generalizados e fornecem estimadores eficientes e com boas propriedades em amostras finitas, como será demonstrado através de uma séries de estudos de Monte Carlo.

Estimadores baseados em Verossimilhança Empírica Generalizada e Mínimo Contraste Generalizado são baseados em uma metodologia semi-paramétrica, que permite a estimação dos parâmetros de dimensão finita relacionados ao processo gerador da parte paramétrica do processo de interesse, em nosso caso os parâmetros do processo de volatilidade estocástica, mas conseguem eficiência (no sentido semi-paramétrico definido em (BICKEL et al., 1993)) através de uma estimação não-paramétrica para a distribuição do processo, que permite utilizar de forma eficiente a informação contida na amostra. Como esta metodologia utiliza mais informação que a estimação pelo método de momentos eficientes, já que esta forma utiliza apenas momentos e não toda a informação na amostra, consegue ter propriedades superiores em amostras finitas, comparáveis ou superiores a métodos baseados em simulação como Markov Chain Monte Carlo, Método de Momentos Eficientes ou Minimum Hellinger Distance ((TAKADA, 2009)).

Os estimadores propostas também endereçam o problema de falta de robustez na presença de outliers. Duas sub-classes de estimadores estudados (o estimador *Exponential Tilting* ((IMBENS; SPADY; JOHNSON, 1998), (KITAMURA; STUTZER, 1997)) e o estimador de *Exponentially Tilted Empirical Likelihood* ((SCHENNACH, 2007)) possuem propriedades de robustez na presença de problemas de especificação incorretas, e estas propriedades se mostram importantes na presença de outliers

contaminando os dados e na presença de distribuições com caudas pesadas nas inovações da média e da volatilidade do processo.

A metodologia de análise deste artigo está baseada em estudos de Monte Carlo para a verificação das propriedades dos estimadores propostos. Para obter compatibilidade entre os resultados obtidos, nós seguimos os mesmos designs dos experimentos de Monte Carlo utilizados nos artigos de (JACQUIER; POLSON; ROSSI, 1994), (ANDERSEN; SORENSEN, 1996) e (TAKADA, 2009), o que permitirá uma comparação direta dos resultados. Os experimentos de Monte Carlo estão baseados na especificação do modelo log-normal de volatilidade estocástica de (TAYLOR, 1986) utilizado nestes artigos, estimados utilizando-se como métodos de estimação os estimadores de Verossimilhança Empírica Generalizada, *Exponential Tilting* e *Exponentially Tilted Empirical Likelihood*, assim como as versões com momentos suavizados destes modelos. Como critério de referência também utilizaremos a estimação pelos métodos de momentos generalizados, utilizando as versões em dois estágios, iterada e por atualização contínua (Continuous Updating). Este benchmarking é útil já que as condições de momentos utilizadas são as mesmas.

As análises realizadas tem o objetivo de verificar as propriedades dos estimadores propostos em relação ao tamanho de amostra utilizado, conjunto de condições de momentos e robustez a processos de inovação com caudas pesadas e outliers. Para isso realizamos três classes de experimentos. Na primeira classe de experimentos analisamos o efeito tamanho de amostra e do conjunto de instrumentos, analisando a estimação com amostras de tamanho 250, 500 e 1000 observações, utilizando-se conjuntos de 24 e 14 condições de momentos, seguindo o artigo de (ANDERSEN; SORENSEN, 1996). Na segunda classe verificamos as propriedades dos estimadores na presença de processos de inovação com caudas pesadas, e para isso utilizamos duas configurações de experimentos. A primeira utiliza uma distribuição Student t com 4 graus de liberdade como processo de inovação da média, e na segunda configuração utilizamos esta mesma distribuição Student t com 4 graus de liberdade, mas agora como processo de inovação na equação que descreve a volatilidade do processo. A última classe de experimentos verifica o efeito de outliers na estimação, e da mesma forma realizamos dois tipos de experimentos. O primeiro verifica os efeitos de um outlier na equação da média (Level Outlier na nomenclatura de (HOTTA; TSAY, 1998)) e o segundo experimento verifica o efeito um outlier na equação da volatilidade (Volatility Outlier segundo (HOTTA; TSAY, 1998)).

Este artigo está estruturado da seguinte forma: na seção 2 revisamos brevemente o modelo log-normal de volatilidade estocástica utilizado, e na seção 3 revisamos o uso de condições de momentos na estimação de modelos de volatilidade estocástica. Na seção 4 apresentamos os métodos de estimação baseados em verossimilhança empírica e mínimo contraste generalizado utilizados. A seção 5 contém os experimentos de Monte Carlo realizados e as conclusões finais do artigo estão na seção 6.

2. MODELO LOG-NORMAL DE VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA

O chamado modelo log-normal de volatilidade, introduzido por (TAYLOR, 1986), pode ser descrito pela seguinte estrutura:

$$(2.1) \quad y_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

$$(2.2) \quad \log \sigma_t^2 = \alpha + \beta \log \sigma_{t-1}^2 + \sigma u_t$$

onde a equação 2.1 descreve o comportamento da média do processo e a equação 2.2 contém a dinâmica da volatilidade. Normalmente é assumido que os processos de inovações na média e na volatilidade são dados por distribuições normais independentes, i.e. $(\varepsilon_t, u_t) \sim iidN(0, I_2)$ e neste modelo o vetor de parâmetros é dado por $\theta = (\alpha, \beta, \sigma)$. O nome do modelo é dado pelo fato de que equação da volatilidade é formulada através do log do processo, e assim surge a denominação de modelo log-normal. Note que é possível interpretar este modelo de forma semi-paramétrica, como aponta (RENAULT, 2009), sem uma especificação a priori das distribuições dos processos de inovação. (RENAULT, 2009) denota este modelo como Exponential-SARV, já que o exponencial da variância é um processo autoregressivo.

Como mostram (FRANCQ; ZAKOÏAN, 2006) não é necessário assumir uma distribuição para a estimação deste modelo, já que como notado anteriormente por (RUIZ, 1994) $\log y_t^2 = \log \sigma_{t-1}^2 + \log \varepsilon_t^2$, o que corresponde a um modelo ARMA(1,1) para o log do quadrado do processo observado y_t , o que permite derivar a representação utilizada por (FRANCQ; ZAKOÏAN, 2006) para obter um estimador consistente por mínimos quadrados para este modelo. (FRANCQ; ZAKOÏAN, 2006) também

mostram que existe um modelo ARMA(m,m) para qualquer potência $\log y_t^m$ deste processo, embora seja importante notar que a representação log-normal é bastante realista, como aponta (ANDERSEN, 1994).

Esta especificação log-normal permite a construção de condições de momentos de qualquer ordem, como mostrado por (TAYLOR, 1986) e (MELINO; TURNBULL, 1990). As condições de momentos do modelo log-normal de volatilidade estocástica por ser obtidas definindo-se inicialmente a média e variância não condicionais do logaritmo equação da variância:

$$\mu = \frac{\alpha}{1 - \beta}, \sigma_y^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \beta^2},$$

e a os demais momentos como:

$$E[|y_t|] = (2/\pi)^{1/2} E[\sigma_t],$$

$$E[y_t^2] = E[\sigma_t^2],$$

$$E[|y_t^3|] = 2\sqrt{2/\pi} E[\sigma_t^3],$$

$$E[y_t^4] = 3E[\sigma_t^4],$$

$$E[|y_t y_{t-j}|] = (2/\pi) E[\sigma_t \sigma_{t-j}],$$

$$E[y_t^2 y_{t-j}^2] = E[\sigma_t^2 \sigma_{t-j}^2].$$

Momentos de ordem superior podem ser escritos como:

$$E[\sigma_t^r] = \exp\left(\frac{ru}{2} + \frac{r^2 u^2}{8}\right)$$

para quaisquer positivos inteiros j e constantes r e s, e da mesma forma as covariâncias podem ser obtidas por:

$$E[\sigma_t^r \sigma_{t-s}^s] = E[\sigma_t^r] E[\sigma_t^s] \exp\left(\frac{rs\beta^j \sigma^2}{4}\right)$$

As condições de momentos utilizadas em (ANDERSEN; SORENSEN, 1996) e em nosso estudo compreendem um conjunto de 24 condições de momentos, utilizando-se momentos absolutos, de ordem 2 até 4 e defasagens de ordens 1 até 10:

$$(2.3) \quad w_t^{24}(Y_t, \theta) = (|y_t|, y_t^2, |y_t^3|, y_t^4, |y_t y_{t-1}|, \dots, |y_t y_{t-10}|, y_t^2 y_{t-1}^2, \dots, y_t^2 y_{t-10}^2)$$

Também utilizamos um segundo vetor de condições de momentos, com 14 condições de momentos dadas por:

$$(2.4) \quad w_t^{14}(Y_t, \theta) = (|y_t|, y_t^2, |y_t^3|, y_t^4, |y_t y_{t-2}|, |y_t y_{t-4}|, |y_t y_{t-6}|, |y_t y_{t-8}|, |y_t y_{t-10}|, y_t^2 y_{t-1}^2, y_t^2 y_{t-3}^2, y_t^2 y_{t-5}^2, y_t^2 y_{t-7}^2, y_t^2 y_{t-9}^2)$$

Com estes dois vetores de condições de momentos podemos realizar a estimação utilizando o método de momentos generalizados definidos na seção 3 e os métodos de verossimilhança empírica/mínimo contraste generalizados (seção 4).

3. ESTIMAÇÃO DE MODELOS DE VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA USANDO MÉTODOS DE MOMENTOS

A estimação pelo método de momentos generalizados de (HANSEN, 1982) é realizada através da equalização dos momentos amostrais aos momentos populacionais, o que equivale a igualar o vetor de condições de momentos $g(Y_t, \theta)$ a zero na forma:

$$(3.1) \quad \bar{g}(y_t, \theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g(y_t, \theta) = 0$$

Este sistema é em geral sobre-identificado (temos mais condições de momentos do que parâmetros), e assim existem infinitas soluções. Para obter uma solução única é necessário uma função critério:

$$(3.2) \quad J(\theta) = \bar{g}(\theta)' W \bar{g}(\theta)$$

e uma solução ótima é definida como a minimização de $J(\theta)$, com W com sendo uma matriz positiva-definida de ponderação. O resultado fundamental obtido por (HANSEN, 1982) é mostrar que a solução assintoticamente eficiente da estimação é obtida quando esta matriz é dada por:

$$(3.3) \quad W^* = \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var} \left(\sqrt{T} \bar{g}(\theta) \right) \right\}^{-1} = \Omega(\theta)^{-1}$$

onde $\Omega(\theta)$ denota a matriz de variância-covariância dos parâmetros do modelo. Desta forma a ponderação assintoticamente eficiente é obtida usando a inversa da matriz de variância-covariância dos parâmetros. Esta matriz é em geral desconhecida, e normalmente estimada usando a classe de estimadores HAC de (NEWKEY; WEST, 1987):

$$(3.4) \quad \hat{\Omega} = \sum_{s=-(T-1)}^{T-1} k_h(s) \hat{\Gamma}_s(\theta^*)$$

onde k denota uma uma função de kernel em função de um certo parâmetro de bandwidth h , escolhido usando os procedimentos de (NEWKEY; WEST, 1987) ou (ANDREWS, 1991):

$$(3.5) \quad \hat{\Gamma}_s(\theta^*) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g(\theta^*, x_t) g(\theta^*, x_{t+s})'$$

O estimador eficiente de Método de Momentos Generalizados é então obtido como a solução do problema:

$$(3.6) \quad \hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \bar{g}(\theta)' \hat{\Omega}(\theta^*) \bar{g}(\theta)$$

Existem várias formas de se realizar a implementação do estimador GMM. A forma inicial proposta por (HANSEN, 1982) é o estimador conhecido como GMM em dois estágios. Este estimador é obtido realizando-se um primeiro estágio obtendo um estimador inicial $\hat{\theta}^* = \arg \min_{\theta} \bar{g}(\theta)' \Omega \bar{g}(\theta)$, onde Ω é uma matriz inicial de ponderação, normalmente uma matriz identidade. A partir deste primeiro estágio é calculada uma matriz HAC $\hat{\Omega}(\theta^*)$ em função desta estimação inicial, e a estimativa final do estimador GMM é obtida como $\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \bar{g}(\theta)' \hat{\Omega}(\theta^*) \bar{g}(\theta)$ com a matriz HAC obtida no primeiro estágio.

Note que neste caso existe uma dependência dos resultados do segundo estágio com a estimação inicial no primeiro estágio, e assim este procedimento pode criar um viés de primeira ordem prejudicando o desempenho do estimador em amostras finitas ((HANSEN; HEATON; YARON, 1996)). Para resolver este problema dois procedimentos alternativos foram propostos. O primeiro procedimento é conhecido como GMM Iterativo. Neste procedimento a estimação do primeiro estágio é reinicializada com o resultado da estimação do segundo estágio, e esta iteração continua até a variação no vetor de parâmetros ou na função critério ser menor que uma tolerância estabelecida.

Um outro estimador possível é conhecido como GMM com *Continuous Updating* ((HANSEN; HEATON; YARON, 1996)). Nesse caso a estimação do parâmetro $\hat{\theta}$ não é realizada em estágios, e sim simultaneamente utilizando um algoritmo de

otimização numérica. Partindo de um vetor inicial θ_0 (normalmente escolhido utilizando o método de GMM em dois estágios) a estimação é realizada através de $\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \bar{g}(\theta)' \hat{\Omega}(\theta^*) \bar{g}(\theta)$, mas agora θ e $\hat{\Omega}(\theta^*)$ são determinados simultaneamente pelo procedimento de otimização numérica. Este procedimento obtém as mesmas propriedades de primeira ordem do estimador de GMM Iterativo, mas segundo (HANSEN; HEATON; YARON, 1996) tem propriedades melhores em termos de vies em amostras finitas, e estes estimador é invariante a reparametrizações no modelo. De acordo com (NEWHEY; SMITH, 2004) e (ANATOLYEV, 2005) os três métodos são assintoticamente equivalentes, mas o vies em amostras finitas de segunda ordem do estimador *Continuous Updating* é menor. Entretanto o procedimento numérico pode estar sujeito a múltiplas modas na função objetivo, o que torna este estimador numericamente instável.

A estimação do modelo de volatilidade estocástica por GMM é realizada utilizando-se as condições de momentos definidas pelo vetor dado pela Eq. 2.3. No entanto existem alguns pontos específicos na estimação de volatilidade estocástica. Como discutido em (MELINO; TURNBULL, 1990) e (HALL, 2005) o procedimento numérico neste problema é dificultado devido a existência de condições de momentos não-diferenciáveis pelo uso de momentos absolutos. Embora estas funções sejam diferenciáveis em quase todos os pontos e o uso de momentos absolutos não afete as propriedades assintóticas dos estimadores (e.g. (HALL, 2005)) é necessário discutir como tratar este problema. (MELINO; TURNBULL, 1990) assumem que o valor da função é 0 nos pontos não-diferenciáveis, mas este procedimento pode ser problemático já que leva a uma descontinuidade na determinação do tamanho do passo no algoritmo de otimização numérica. Uma forma alternativa é realizar um procedimento de interpolação numérica no ponto de não-diferenciabilidade, que é o procedimento realizado neste artigo. As propriedades desta aproximação podem ser vistas em (HALL, 2005).

Propriedades do estimador GMM na estimação de modelos de volatilidade estocástica podem ser encontradas no artigo de (ANDERSEN; SORENSEN, 1996), e uma revisão completa do uso de métodos de momentos, incluindo o uso de métodos de momentos simulados, pode ser encontrada em (RENAULT, 2009). Os resultados mostram que este estimador, embora seja computacionalmente simples, tem propriedades pobres em amostras finitas devido a problemas de vies e ineficiência, embora os resultados sejam melhores que os obtidos pelo estimador de Quasi-Máxima Verossimilhança (e.g. (JACQUIER; POLSON; ROSSI, 1994)). O problema em amostras finitas do estimador GMM está relacionado a necessidade do uso de um número elevado de momentos para garantir a eficiência do estimador, mas o vies em amostras finitas do estimador GMM é proporcional ao número de condições de momentos utilizadas. Desta forma existe um trade-off entre vies em amostras finitas e eficiência na implementação deste estimador. Note que embora a principal vantagem do estimador GMM seja sua formulação semi-paramétrica que não necessita de pressupostos sobre a distribuição da amostra, o estimador apenas utiliza os momentos do processo e não utiliza a toda a informação existente na amostra.

No artigo de (ANDERSEN; SORENSEN, 1996) são discutidas várias detalhes na especificação do estimador GMM para modelos de volatilidade estocástica, como por exemplo a escolha da função de Kernel e o bandwidth utilizado, problemas de convergência e outros subconjuntos de condições de momentos. Neste trabalho utilizamos como função de kernel a função Quadratic Spectral, com o bandwidth ótimo escolhido pelo procedimento de (ANDREWS, 1991).

4. VEROSSIMILHANÇA EMPÍRICA GENERALIZADA E ESTIMADORES DE MÍNIMO CONTRASTE GENERALIZADOS

Enquanto que o uso do Método de Momentos Generalizados é uma forma bastante utilizada da estimação devido a facilidade na construção de condições de momentos, principalmente na estimação de modelos não lineares, esta facilidade tem um custo. Existe um trade-off entre a menor necessidade de pressupostos para a sua utilização e a eficiência do método em amostras finitas, como discutido na seção anterior. As condições de regularidade para estimadores de métodos de momentos generalizados ((HANSEN, 1982), (NEWHEY; MCFADDEN, 1994), (HALL, 2005)) envolvem apenas condições para a validade assintótica das condições de momentos, e não assumem condições mais fortes como o conhecimento da distribuição do processo, o que representa uma sub-utilização da informação presente na amostra.

A situação oposta seria a estimação pelo Método de Máxima Verossimilhança, que utiliza não apenas os momentos condicionais do processo mas toda a informação existente nas densidades condicionais, e se o processo é corretamente especificado e atende as condições de regularidade ele é melhor estimador assintoticamente normal, e também alcança otimalidade em medidas como a eficiência de Badahur ((KITAMURA, 2006), (DASGUPTA, 2008)). Note que a estimação por máxima verossimilhança no contexto de estimação de modelos de volatilidade estocástica é um problema mais complexo já que devido ao fato da volatilidade ser uma variável latente a avaliação da função de verossimilhança exata usualmente

exige métodos de simulação como importance sampling ou Markov Chain Monte Carlo. Aproximações usando o princípio de Quasi-Máxima verossimilhança representam um custo em termos de um desempenho inferior em amostras finitas.

Neste contexto uma forma alternativa de formular estimadores que não necessitem da especificação paramétrica da distribuição do processo é através do uso de métodos de estimação semi-paramétricos baseados em uma estimação não-paramétrica da função de verossimilhança do processo. Estes estimadores semi-paramétricos são conhecidos como métodos de Verossimilhança Empírica (*Empirical Likelihood - EL*), formulados como generalizações dos métodos de verossimilhança não-paramétrica de (KIEFER; WOLFOWITZ, 1956).

Seguindo a apresentação de (KITAMURA, 2006), a função de log-verossimilhança não-paramétrica de uma seqüência de dados IID $\{x_i\}_{i=1}^n$ de uma densidade desconhecida é definida como:

$$(4.1) \quad \ell_{NP}(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n \log p_i, \quad (p_1, \dots, p_n) \in \Delta,$$

definindo Δ como o simplex $\{(p_1, \dots, p_n) : \sum_{i=1}^n p_i = 1, 0 \leq p_i, i = 1, \dots, n\}$.

Esta definição equivale a tratar cada ponto da amostra como proveniente de uma distribuição multinomial com o suporte dado pela observações $\{x_i\}_{i=1}^n$ da amostra, mesmo que a densidade de x_i não seja uma multinomial. Como esta formulação não envolve nenhum modelo e não contenha a estrutura paramétrica do modelo, ela é um tanto restritiva para ser utilizada em problemas de inferência que envolvam uma parte paramétrica com um número finito de parâmetros. A especificação semi-paramétrica deste processo foi obtido por (OWEN, 1991), que estabeleceu o conceito de verossimilhança empírica.

Esta formulação é importante já que permite conexões entre a estimação não-paramétrica da função de verossimilhança e a estimação utilizando condições de momentos, formuladas com o princípio de Equações de Estimação e M-Estimadores, como mostrado por (QIN; LAWLESS, 1994), e estas Equações de Estimação podem ser formuladas através do uso de condições de momentos da mesma forma que estimadores GMM.

Assumindo condições de momentos dadas por:

$$(4.2) \quad E[g(\theta, x_t)] = \int g(\theta, x) d\mu = 0, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^7$$

o problema de estimação usando condições de momentos pode ser transformado em uma estimação não-paramétrica de verossimilhança através da construção de probabilidades implícitas p_i , e assim a função de log-verossimilhança a ser maximizada fica sendo:

$$(4.3) \quad \ell_{NP}(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n \log p_i, \quad \text{tal que} \quad \sum_{i=1}^n g(\theta, x_t) p_i = 0$$

O estimador que maximiza esta expressão é o estimador de *Máxima Verossimilhança Empírica*, que maximiza a função de verossimilhança empírica do processo impondo simultaneamente a validade das condições de momentos. Estas probabilidades implícitas dão maior peso para observações aonde as condições de momentos sejam mais próximas de zero e menor peso para observações aonde as condições de momentos sejam não sejam satisfeitas. Note que o método de Momentos Generalizados pode ser obtido como um caso particular assumindo que todos os pesos $p_t = 1/n$.

Esta formulação de verossimilhança empírica é especialmente útil na estimação de modelos com variáveis latentes em que inexistam uma forma de se avaliar a função de verossimilhança exata do processo. Da mesma forma que o estimador GMM não é necessário assumir o conhecimento da verossimilhança do processo, mas nos estimadores de verossimilhança empírica a informação da distribuição do processo é utilizada na estimação através da estimação não-paramétrica. Esta construção permite obter propriedades de eficiência no sentido semi-paramétrico definido em (BICKEL et al., 1993).

Note que quando a amostra não é um processo IID é preciso modificar o tratamento dado as condições de momentos. Nesta situação o método é modificado assumindo que as condições de momentos provém de um processo fracamente dependente e possivelmente heterocedástico. (ANATOLYEV, 2005) propõe substituir $g(\theta, x_t)$ por uma versão suavizada (*smoothed*) definida como:

$$(4.4) \quad g^w(\theta, x_t) = \sum_{s=-m}^m w(s) p_t g(\theta, x_{t-s})$$

onde $w(s)$ são pesos obtidos por uma função de kernel somando um, no espírito de um estimador HAC ((ANDREWS, 1991)). Esta modificação permite obter as mesmas condições de eficiência assintótica de primeira ordem existente nos métodos de GMM. Neste modo as condições de momentos ficam na forma:

$$(4.5) \quad \sum_{t=1}^T p_t g^w(\theta, x_t) = 0$$

Em estimadores GMM o estimador é definido através da minimização da forma quadrática 3.6, e nas estimações em modelos sobre-identificados as condições de momentos no ponto de mínimo não são necessariamente iguais a zero para todos os parâmetros. Nos estimadores de verossimilhança empírica formulados através de condições de momentos estas são exatamente iguais a zero pela reponderação utilizando as probabilidades empíricas p_t .

Note que em modelos exatamente identificados todos os estimadores propostos obtêm resultados similares, já que em todos estes estimadores as condições de momentos são sempre válidas. Um resultado importante é que em modelos sobre-identificados com condições de momentos válidas todos estes estimadores obtêm a mesma variância assintótica (e.g. (KITAMURA, 2006)).

É possível formular estes estimadores de máxima verossimilhança empírica como casos particulares da classe de estimadores semi-paramétricos baseados na minimização de distâncias, ou como definido em (BICKEL et al., 1993), estimadores de Mínimo Contraste Generalizado (*Generalized Minimum Contrast - GMC*)². Esta formulação permite obter as propriedades de eficiência semi-paramétrica nesta classe de estimadores. Note que também podemos traçar um paralelo com a interpretação do estimador GMM como um estimador de mínimo χ^2 ou a interpretação de estimadores de Quasi-Máxima Verossimilhança como estimadores de Mínimo Contraste ((WHITE, 1982)).

Para mostrar esta interpretação alternativa dos estimadores de verossimilhança empírica começamos definindo uma função geral de divergência $D(P, Q)$ entre duas medidas de probabilidade P e Q como:

$$(4.6) \quad D(P, Q) = \int \phi \left(\frac{dP}{dQ} \right) dQ,$$

onde ϕ é assumida uma função convexa. Esta condição é importante já que permite definir as condições de regularidade no processo, e.g. (BICKEL et al., 1993). Defina M como sendo o conjunto de todas as medidas de probabilidade em \mathbb{R}^p e \mathcal{P} o modelo estatístico definido pelas medidas de probabilidade compatíveis com 4.7

$$(4.7) \quad \mathcal{P}(\theta) = \left\{ P \in M : \int g(\theta, x) dP = 0 \right\}$$

O estimador de mínimo contraste generalizado é definido como a solução de:

$$(4.8) \quad \inf_{\theta \in \Theta} \inf_{P \in \mathcal{P}(\theta)} D(P, \mu).$$

e assim em um modelo especificado corretamente esta discrepância deve ser única e mínima em $\theta = \theta_0$. Algumas medidas de divergência utilizadas na literatura são a divergência de Kullback-Leibler e a medida de entropia.

Para estabelecer a conexão com os estimadores de máxima verossimilhança empírica definidos pela equação 4.5 e os estimadores de mínimo contraste através das probabilidades implícitas note que o estimador de mínimo Contraste pode ser formulado com um problema na forma de condições de momentos $E(g(\theta, x_t)) = 0$ fazendo o estimador de mínimo contraste ser uma função destas probabilidades, através do uso de alguma função de contraste h_T :

²Veja (BICKEL et al., 1993), cap 7, para uma discussão geral sobre condições de regularidade, existência e eficiência de estimadores de mínimo contraste generalizado.

$$(4.9) \quad \hat{\theta}_n = \arg \min_{\theta, p_t} \sum_{t=1}^T h_T(p_t).$$

No caso de estimadores de verossimilhança empírica a estimação pontual $\hat{\theta}$ é aquela que minimiza a discrepância entre \hat{p}_t e pesos uniformes. Um resultado importante é que uma escolha adequada de função de discrepância pode levar a uma representação unificada de estimadores de Máxima Verossimilhança Empírica e Mínimo Contraste. Esta representação pode ser obtida quando a função $h_T(p_t)$ pertence a família Cressie-Read de discrepâncias dada por:

$$(4.10) \quad h_T(p_t) = \frac{[\gamma(\gamma + 1)]^{-1}(Tp_t)^{\gamma+1} - 1}{T}$$

e com restrições sobre a definição da discrepância Cressie-Read temos casos particulares de várias classes de estimadores. Verossimilhança Empírica é obtido com a restrição $\gamma \rightarrow 0$ na função de discrepância $h_T(p_t)$, o método de mínimo contraste generalizado conhecido como *Exponential Tilting* (ET) de (KITAMURA; STUTZER, 1997) e (IMBENS; SPADY; JOHNSON, 1998) é obtido com $\gamma \rightarrow -1$ e o estimador de *Continuos Updating* utilizando a formulação de Verossimilhança Empírica é obtido com $\gamma \rightarrow 1$.

Note que o problema de estimação envolve obter estimadores para as probabilidades implícitas e para os parâmetros da parte paramétrica do modelo, o que em princípio é um problema de otimização de alta dimensão. (SMITH, 2001) mostrou que é possível definir um outro estimador que também contém estes estimadores como casos particulares, e que permite uma formulação dual do problema de otimização de dimensão inferior.

O método de Verossimilhança Empírica Generalizado (*Generalized Empirical Likelihood - GEL*) de (SMITH, 2001) é obtido como a solução do seguinte problema de ponto de sela (*saddlepoint*):

$$(4.11) \quad \hat{\theta}_n = \arg \min_{\theta} \left[\max_{\lambda} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \rho(\lambda' g^w(\theta, x_t)) \right]$$

onde λ define multiplicadores de Lagrange impondo a restrição:

$$(4.12) \quad \sum_{t=1}^T p_t g^w(\theta, x_t) = 0$$

Estimadores são obtidos resolvendo a equação anterior com a condição de primeira ordem:

$$(4.13) \quad \sum_{t=1}^T p_t \lambda' \left(\frac{\partial g^w(\theta, x_t)}{\partial \theta} \right) = 0$$

com:

$$(4.14) \quad p_t = \frac{1}{T} \rho'(\lambda' g^w(\theta, x_t))$$

Este estimador de verossimilhança generalizado contém o estimador de verossimilhança empírica, assumindo as mesmas condições sobre γ da função de divergência Cressie-Read, através de modificações das funções h e ρ . O estimador de verossimilhança empírica é obtido com $h(p) = -\ln np$ e $\rho(\xi) = \ln(1 - \xi)$, o estimador de *Exponential Tilting* ((KITAMURA; STUTZER, 1997), (IMBENS; SPADY; JOHNSON, 1998)) com $h(p) = np \ln np$ e $\rho(\xi) = -\exp(\xi)$, e o estimador de *Continuos Updating* como $h(p) = (np)^2$ e $\rho(\xi) = -(1 + \xi)^2/2^3$.

³Veja a tabela 1 em (SMITH, 2001) para maiores detalhes.

Uma classe adicional de estimadores, que não pertencem diretamente a classe de estimadores de verossimilhança empírica ou mínimo contraste, mas é obtido combinando o estimador de verossimilhança empírica e o estimador de *Exponencial Tilting*, é conhecido como *Exponentially Tilted Empirical Likelihood (ETEL)*, proposto por (SCHENNACH, 2007). Este estimador é definido como:

$$(4.15) \quad \hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{h}(p_t(\theta)) \right)$$

onde $\tilde{g}_i(\theta)$ é solução de :

$$(4.16) \quad \min_{\{g_i\}_{i=1}^n} n^{-1} \sum_{i=1}^n h(p_t)$$

sujeito a $\sum_{i=1}^n p_t g(\theta, x_t) = 0$ e $\sum_{i=1}^n p_t = 1$, com $\tilde{h}(\hat{p}_t) = -\ln(np_t)$ e $h(p_t) = np_t \ln(np_t)$.

Note que o estimador ETEL (*Exponentially Tilted Empirical Likelihood*) utiliza o método de *Exponential Tilting* para encontrar as probabilidades $\hat{w}_i(\theta)$ e o método de verossimilhança empírica para estimar o vetor de parâmetros $\hat{\theta}$. Estas probabilidades estão relacionadas com os multiplicadores λ através da relação:

$$(4.17) \quad \hat{p}_t(\theta) = \frac{\left(\hat{\lambda}(\theta)' g(\theta, x_t) \right)}{\sum_{i=1}^n \left(\hat{\lambda}(\theta)' g(\theta, x_t) \right)}$$

Uma propriedade importante dos estimadores da classe ETEL é seu comportamento na presença de especificação incorreta. (IMBENS; SPADY; JOHNSON, 1998) aponta que o estimador de verossimilhança empírica pode ter comportamento inadequado na presença de especificação incorreta devido a presença de uma singularidade na sua função de influência, e de acordo com teorema 1 em (SMITH, 2001) as propriedades assintóticas do estimador de verossimilhança empírica podem ser severamente degradadas na presença de problemas mínimos de especificação. Este efeito também afeta as estimações das probabilidades implícitas \hat{p}_t , já que na presença de problemas de especificação as probabilidades implícitas em problemas de verossimilhança tendem a se concentrar nas observações extremas, em oposição ao esperado em um estimador robusto no sentido de (HUBER, 1981) e (HAMPEL et al., 1986), que deveria minimizar a importância de observações extremas na construção do estimador.

Podemos sumarizar algumas propriedades comuns dos estimadores discutidos neste artigo. A primeira propriedade é que todos os estimadores utilizados (GMM em dois estágios, GMM Iterativo, GMM *Continuos Updating*, *Generalized Empirical Likelihood*, *Exponential Tilting* e *Exponentially Tilted Empirical Likelihood*) possuem as mesmas propriedades de consistência e eficiência assintótica de primeira ordem (e.g. (SMITH, 2001), (SCHENNACH, 2007)), e na validade das condições de momentos especificadas todos os estimadores possuem a mesma variância assintótica. No entanto o desempenho em amostras finitas pode ser bastante diferente. O estimador de GMM em dois estágios pode ser severamente viesado nos tamanhos de amostra utilizados em economia e finanças, e estimadores de *Continuos Updating* são numericamente instáveis devido a existência de múltiplas modas na função objetivo (e.g. (HANSEN; HEATON; YARON, 1996)). Outra propriedade interessante é que estimadores baseados em GMC e GEL são invariantes a transformações lineares no vetor de condições de momentos, o que não ocorre no estimador de GMM em dois estágios. Estimadores baseados em verossimilhança empírica/mínimo contraste generalizado são eficientes no sentido semi-paramétrico de (BICKEL et al., 1993), e possuem propriedades superiores em termos de viés e propriedades assintóticas de ordem superior. Estes estimadores também apresentam propriedades ótimas em termos de testes de hipóteses. Como mostrado por (KITAMURA, 2006) estes testes são ótimos nos critérios minimax e de *large deviations* e uniformemente mais poderosos no sentido generalizado de Neyman-Person.

Um ponto fundamental é que nos estimadores de máxima verossimilhança empírica e mínimo contraste baseados na discrepância de Cressie-Read o viés em amostras finitas não cresce com o número de condições de momentos utilizadas. Esta propriedade permite que a eficiência dos estimadores seja obtida com o uso de um número elevado de condições de momentos, sem que isso represente um aumento no viés em amostras finitas como ocorre no uso do estimador GMM, o que leva ao problema do desempenho inferior deste método em comparação a outras formas de estimação.

O resultado obtido por (SMITH, 2001) é que na classe de estimadores de mínimo contraste/verossimilhança empírica o único estimador com comportamento adequado na presença de problemas de especificação é o estimador de *Exponential Tilting*, já que sua função de influência não apresenta singularidades. O estimador ETEL é uma combinação do estimador de verossimilhança empírica e do estimador de *Exponential Tilting*, e mantém as características de eficiência assintótica e mínimo viés do estimador EL e adicionalmente herda a robustez problemas de especificação, devido ao uso do estimador *Exponential Tilting* para estimar as probabilidades implícitas, como mostrado nos teoremas 8-10 em (SMITH, 2001), que prova que este estimador é \sqrt{n} convergente mesmo na presença de problemas de especificação.

Estimadores para os parâmetros da parte paramétrica do modelo e para as probabilidades implícitas podem ser obtidos por métodos de otimização numérica ou via métodos iterativos de quasi-Newton. Estes métodos podem ser formuladas em um problema de dimensão menor através de uma formulação dual ((KITAMURA, 2006)) através de otimização numérica utilizando os multiplicadores de Lagrange definidos pela equações (4.11, 4.17), que é forma geral utilizada neste artigo.

Note que na estimação de modelos de volatilidade estocástica estamos sujeitos ao mesmo problema do uso de condições de momentos não diferenciáveis devido ao uso de momentos absolutos. Este problema impede o uso simples dos métodos iterativos para a estimação dos multiplicadores de Lagrange propostos em (KITAMURA, 2006), e assim nestes casos precisamos utilizar as mesmas técnicas de otimização numérica com a interpolação na vizinhança dos pontos de descontinuidade discutidas na estimação por GMM.

5. ANÁLISES DE MONTE CARLO

Conforme colocado na introdução iremos analisar o desempenho dos estimadores propostos através de uma série de estudos de Monte Carlo, com o objetivo de verificar o desempenho de cada estimador em distintas configurações de parâmetros, tamanhos de amostra, condições de momentos utilizadas e robustez na presença de problemas de especificação e outliers. Para analisar estes problemas trabalhamos com três configurações de parâmetros para cada experimento realizado. Estas configurações seguem as mesmas configurações utilizadas nos artigos de (JACQUIER; POLSON; ROSSI, 1994), (ANDERSEN; SORENSEN, 1996) e (TAKADA, 2009). Os conjuntos de parâmetros simulados correspondem aos parâmetros (α, β, σ) dados por $(-0.736, .9, .3629)$, $(-0.368, .95, .26)$ e $(-.1472, .98, .1657)$. Esta escolha é justificada no artigo de (JACQUIER; POLSON; ROSSI, 1994) como configurações que geram uma mesma variância não condicional mas com distintas configurações de persistência.

Na primeira análise realizamos a estimação dos modelos de referência, com estimação dos vetores de parâmetros apresentados no parágrafo anterior. Para cada vetor de parâmetros foram realizada 1000 simulações de tamanho 500, que será o tamanho padrão de amostra em todas as análises realizadas, com a exceção da que verifica os efeitos do tamanho de amostra. Cada simulação foi estimada pelos seguintes métodos - GMM em dois estágios (gmm2s), GMM Iterativo (gmmiter), GMM *Continuos Updating* (gmmcue), *Generalized Empirical Likelihood* (gelest), *Exponential Tilting* (gelet) e *Exponentially Tilted Empirical Likelihood* (geletel), bem como as versões com momentos suavizados destes últimos estimadores (sgelest, sgelet e sgeletel).

As Tabelas 1, 2 e 3 mostram os resultados da estimação destes modelos, com cada tabela apresentando a média de cada estimador, viés, erro quadrático médio (mean squared error - mse) e erro absoluto médio (mean absolute error - mae) dos estimadores de cada parâmetro. Para facilitar a visualização dos resultados, construímos a Figura 5.1 que mostra o mse e mae de cada estimador para cada parâmetro, e permite uma visualização mais simples dos resultados.

É possível notar que os resultados, em termos de erro quadrático médio e erro absoluto médio, mostram que em geral os estimadores baseados em verossimilhança empírica e mínimo contraste generalizado são bastante superiores aos obtidos pelos estimadores baseados em GMM, e esta superioridade vale para todos os parâmetros estimados nestas 3 configurações de parâmetros. Este resultado dá suporte ao uso destes métodos como metodologias competitivas na estimação de modelos de volatilidade estocástica.

Embora neste artigo a comparação direta seja com estimadores utilizando as mesmas condições de momentos, devido ao uso da mesma configuração de parâmetros de outros artigos é possível comparar os resultados obtidos com outras metodologias de estimação. Os resultados obtidos são diretamente comparáveis com os analisados no artigo de (TAKADA, 2009). Neste artigo é proposto um estimador para modelos de volatilidade estocástica utilizando distâncias de Hellinger simuladas, e neste trabalho é realizada uma comparação deste método com outras metodologias como Método de Momentos Eficientes (EMM), Markov Chain Monte Carlo e Maximum Likelihood Monte Carlo.

	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.700191	-0.608924	-0.569311	-0.729763	-0.730008	-0.728858	-0.732023	-0.730267	-0.727510
bias α	0.035809	0.127076	0.166689	0.006237	0.005992	0.007142	0.003977	0.005733	0.008490
mse α	0.495912	0.827004	0.383436	0.000723	0.000105	0.000229	0.002954	0.000148	0.000431
mae α	0.494248	0.686760	0.466081	0.016242	0.007843	0.011289	0.014323	0.008779	0.011775
mean β	0.905908	0.918369	0.923634	0.902438	0.901313	0.901860	0.901165	0.901239	0.901681
bias β	0.005908	0.018369	0.023634	0.002438	0.001313	0.001860	0.001165	0.001239	0.001681
mse β	0.008939	0.014804	0.006909	0.000019	0.000005	0.000009	0.000049	0.000007	0.000013
mae β	0.066857	0.092551	0.063312	0.003243	0.001806	0.002431	0.002724	0.001962	0.002344
mean σ	0.236795	0.158262	0.170565	0.386721	0.387840	0.380383	0.378491	0.383913	0.376488
bias σ	-0.126105	-0.204638	-0.192335	0.023821	0.024940	0.017483	0.015591	0.021013	0.013588
mse σ	0.039156	0.067792	0.053258	0.001503	0.001488	0.001911	0.002134	0.001700	0.002037
mae σ	0.168891	0.234061	0.207049	0.031779	0.033321	0.035319	0.037523	0.035307	0.036788

TABELA 1. $\alpha=-0.736$ $\beta=.9$ $\sigma=.3629$, T=500

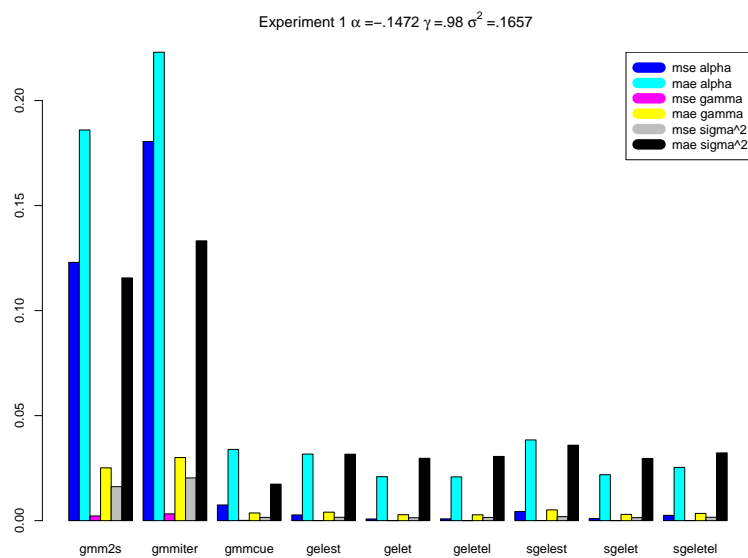
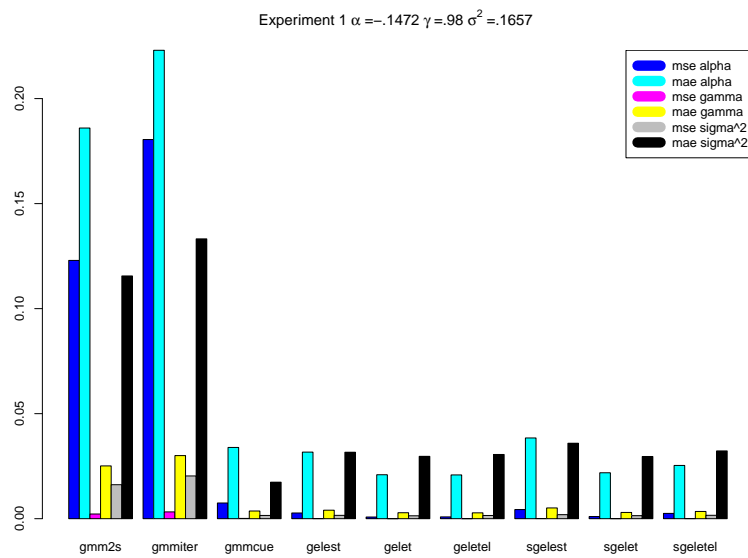
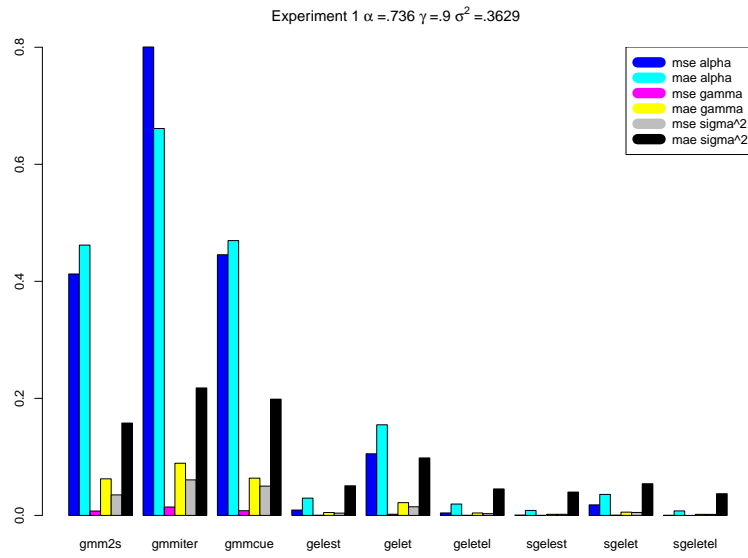
	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.323798	-0.300172	-0.520061	-0.371048	-0.366947	-0.369468	-0.367388	-0.366799	-0.367850
bias α	0.044202	0.067828	-0.152061	-0.003048	0.001053	-0.001468	0.000612	0.001201	0.000150
mse α	0.209281	0.375829	0.034725	0.000468	0.000219	0.000250	0.000331	0.000225	0.000631
mae α	0.311453	0.394674	0.156372	0.012824	0.010469	0.011898	0.012324	0.011163	0.013191
mean β	0.956477	0.959678	0.930090	0.950147	0.950309	0.950104	0.950271	0.950331	0.950167
bias β	0.006477	0.009678	-0.019910	0.000147	0.000309	0.000104	0.000271	0.000331	0.000167
mse β	0.003805	0.006868	0.000635	0.000008	0.000004	0.000005	0.000006	0.000004	0.000010
mae β	0.042185	0.053324	0.020561	0.001767	0.001443	0.001708	0.001526	0.001395	0.001681
mean σ	0.146227	0.098469	0.198858	0.265285	0.272920	0.262856	0.258772	0.269163	0.257539
bias σ	-0.113773	-0.161531	-0.061142	0.005285	0.012920	0.002856	-0.001228	0.009163	-0.002461
mse σ	0.027740	0.040511	0.004846	0.001597	0.001578	0.001870	0.002119	0.001679	0.002234
mae σ	0.142769	0.182002	0.061584	0.031468	0.033283	0.034507	0.037988	0.034831	0.039488

TABELA 2. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, T=500

	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.148610	-0.153037	-0.161124	-0.177110	-0.167514	-0.166558	-0.182551	-0.168109	-0.170785
bias α	-0.001410	-0.005837	-0.013924	-0.029910	-0.020314	-0.019358	-0.035351	-0.020909	-0.023585
mse α	0.122958	0.180502	0.007471	0.002719	0.000792	0.000865	0.004335	0.001014	0.002519
mae α	0.185981	0.222997	0.033918	0.031699	0.020929	0.020838	0.038433	0.021868	0.025349
mean β	0.980010	0.979486	0.979135	0.976228	0.977244	0.977427	0.975315	0.977149	0.976785
bias β	0.000010	-0.000514	-0.000865	-0.003772	-0.002756	-0.002573	-0.004685	-0.002851	-0.003215
mse β	0.002228	0.003236	0.000131	0.000043	0.000017	0.000017	0.000073	0.000023	0.000048
mae β	0.025133	0.030039	0.003657	0.004043	0.002837	0.002788	0.005116	0.002971	0.003441
mean σ	0.078125	0.055286	0.148443	0.169463	0.170654	0.160767	0.167593	0.169098	0.160081
bias σ	-0.087575	-0.110414	-0.017257	0.003763	0.004954	-0.004933	0.001893	0.003398	-0.005619
mse σ	0.016178	0.020346	0.001544	0.001591	0.001388	0.001523	0.001909	0.001439	0.001613
mae σ	0.115562	0.133223	0.017375	0.031635	0.029684	0.030572	0.035919	0.029612	0.032264

TABELA 3. $\alpha=.1472$ $\beta=.98$ $\sigma=.1657$, T=500

FIGURA 5.1. Benchmark - Amostra de Tamanho 500 - mse e mae



	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.845827	-0.840909	-0.672729	-0.736400	-0.728755	-0.727990	-0.730019	-0.729343	-0.726712
bias α	-0.109827	-0.104909	0.063271	-0.000400	0.007245	0.008010	0.005981	0.006657	0.009288
mse α	0.944574	2.522021	1.339914	0.004713	0.000205	0.000555	0.000448	0.000775	0.001030
mae α	0.568116	0.956395	0.602316	0.023396	0.010023	0.015524	0.013468	0.012361	0.016576
mean β	0.887361	0.889161	0.910046	0.901653	0.901630	0.902274	0.901814	0.901582	0.902088
bias β	-0.012639	-0.010839	0.010046	0.001653	0.001630	0.002274	0.001814	0.001582	0.002088
mse β	0.016784	0.043542	0.023987	0.000080	0.000009	0.000016	0.000015	0.000020	0.000028
mae β	0.076241	0.127159	0.081218	0.004287	0.002298	0.003158	0.002857	0.002684	0.003380
mean σ	0.255995	0.139735	0.143907	0.383615	0.385449	0.377069	0.377577	0.383512	0.370742
bias σ	-0.106905	-0.223165	-0.218993	0.020715	0.022549	0.014169	0.014677	0.020612	0.007842
mse σ	0.042192	0.079458	0.067077	0.002284	0.001830	0.002593	0.002906	0.002043	0.003781
mae σ	0.170713	0.256598	0.237429	0.037310	0.036526	0.040098	0.041506	0.038537	0.046534

TABELA 4. $\alpha=-0.736$ $\beta=.9$ $\sigma=.3629$, $T=250$

Na Tabela 1 em (TAKADA, 2009) são mostrados os resultados para o mse destes estimadores para o vetor o primeiro vetor de parâmetros estudado, para uma amostra de tamanho 500. Os resultados de uma comparação direta com os resultados presentes nesta tabela mostram que os estimadores baseados em GEL/GMC são superiores em termos de mse aos métodos de SMHD (Simulated Minimum Hellinger Distance, EMM (Efficient Method of Moments) e MCMC (Markov Chain Monte Carlo) e tem desempenho superior ou equivalente aos estimadores de MCL (Monte Carlo Maximum Likelihood) pelo critério de erro quadrático médio. Em comparação com os resultados deste artigo, podemos notar os resultados de todos os estimadores baseados em GEL/GMC são superiores a todos estes métodos, exceto para a estimação de α aonde os estimadores obtêm um erro quadrático médio igual ao estimador de MCL.

Nesta comparação é importante notar que estimadores de GEL/GMC não necessitam do procedimento de simulações de Monte Carlo, e são computacionalmente mais simples que estes métodos, indicando que o uso de verossimilhança empírica e mínimo contraste permite obter propriedades em amostras finitas superiores aos métodos até agora consideramos mais eficientes na estimação de volatilidade estocástica, com um custo computacional e de implementação sensivelmente menor.

5.1. Efeito do Tamanho de Amostra e Conjunto de Instrumentos. Para verificar o efeito do tamanho de amostra no desempenho dos estimadores, realizamos uma análise com a estimação dos vetores de parâmetros estudados com amostras de tamanho 250 (Tabelas 4, 5 e 6) e 1000 (Tabelas 7, 8 e 9) e utilizando as 24 condições de momentos definidas pela equação 2.3. Como esperado o aumento no tamanho da amostra representa uma redução no mse e mae de todos os estimadores, mas com efeitos diferentes para cada configuração de parâmetros e método de estimação. Para sumarizar estes resultados, mostramos na Figura 5.2 a eficiência relativa, definida como a razão entre o mse da amostra de Tamanho 250 e o mse de Tamanho 1000 para cada configuração.

Exceto para o estimador GEL na configuração 2 de parâmetros, com uma razão de eficiência inferior a um, existe um ganho geral em termos do mse para todos os parâmetros. Este resultado particular para o estimador GEL nesta configuração por ser explicado pela maior dificuldade de convergência notada nesta configuração particular, mas é importante notar que na versão com a suavização de momentos este estimador se comporta da forma esperada.

Como é possível notar na Figura 5.2 o tamanho da amostra tem efeitos heterogêneos para cada estimador dependendo da configuração de parâmetros. Os estimadores baseados em GEL/GMC com suavização de momentos tem maior ganho na configuração com menor persistência, enquanto que os baseados em GMM se comportam da forma oposta. Este resultado pode ser interpretado pelo fato de que a suavização de momentos é mais eficiente na situação de menor persistência na volatilidade.

Como discutido anteriormente, a principal motivação teórica para o uso de estimadores baseados em GEL/GMC está na possibilidade de se utilizar um maior número de condições de momentos para possibilitar uma estimação mais eficiente, já que nestes métodos o viés em amostras finitas não cresce com o número de condições de momentos, como ocorre com estimadores GMM. Para verificar esta propriedade utilizamos uma nova estimação com um subconjunto do vetor de condições

	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.453177	-0.510670	-0.582461	-0.369508	-0.365449	-0.367953	-0.367438	-0.365712	-0.366300
bias α	-0.085177	-0.142670	-0.214461	-0.001508	0.002551	0.000047	0.000562	0.002288	0.001700
mse α	0.472332	1.448096	0.080215	0.000396	0.000215	0.000345	0.001415	0.000261	0.001354
mae α	0.392820	0.621217	0.219123	0.013576	0.010837	0.012862	0.016954	0.011440	0.016981
mean β	0.939239	0.932243	0.921192	0.950571	0.950596	0.950449	0.950410	0.950571	0.950487
bias β	-0.010761	-0.017757	-0.028808	0.000571	0.000596	0.000449	0.000410	0.000571	0.000487
mse β	0.008842	0.025796	0.001543	0.000007	0.000005	0.000007	0.000024	0.000006	0.000023
mae β	0.053047	0.082917	0.029686	0.002000	0.001679	0.002015	0.002288	0.001694	0.002338
mean σ	0.171005	0.093941	0.178377	0.262543	0.272532	0.258514	0.255426	0.269208	0.252188
bias σ	-0.088995	-0.166059	-0.081623	0.002543	0.012532	-0.001486	-0.004574	0.009208	-0.007812
mse σ	0.028943	0.047305	0.009177	0.002206	0.001896	0.002725	0.003091	0.002087	0.003352
mae σ	0.142804	0.200365	0.082031	0.036923	0.036060	0.041672	0.045007	0.038874	0.047074

TABELA 5. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, T=250

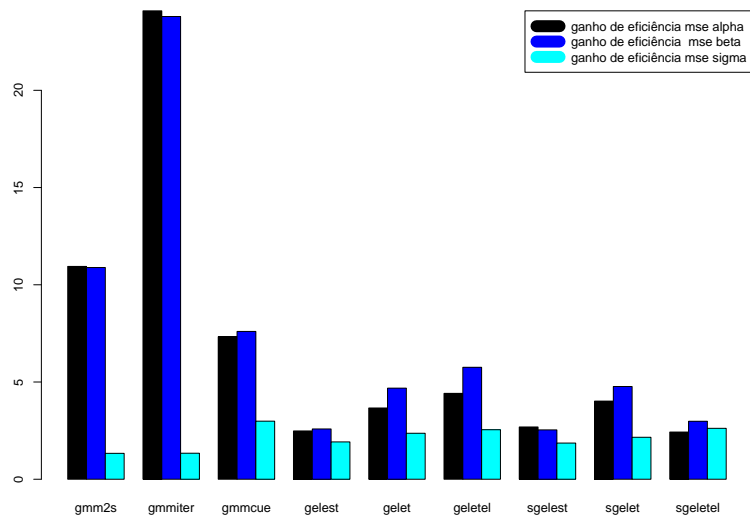
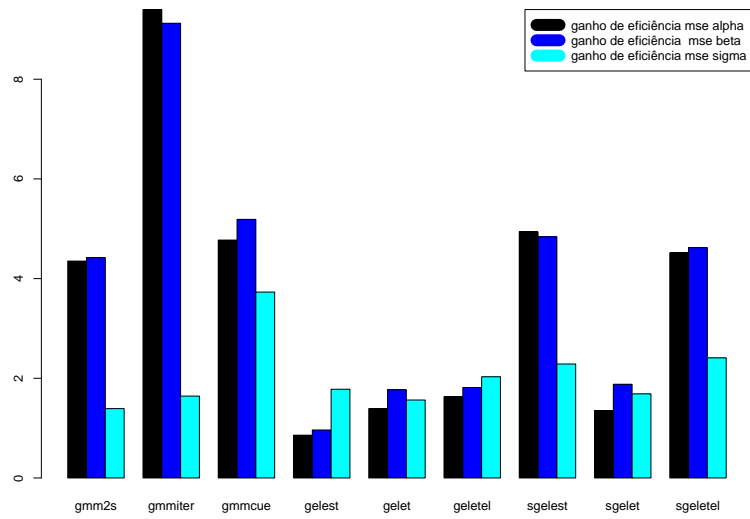
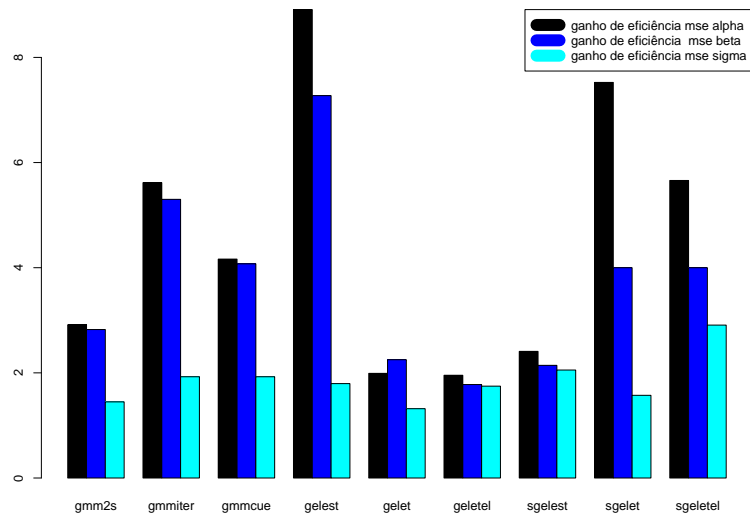
	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.287550	-0.358624	-0.178688	-0.184597	-0.174181	-0.172286	-0.184011	-0.175501	-0.178481
bias α	-0.140350	-0.211424	-0.031488	-0.037397	-0.026981	-0.025086	-0.036811	-0.028301	-0.031281
mse α	0.480456	1.419835	0.036347	0.003332	0.001820	0.002089	0.004401	0.002261	0.002978
mae α	0.290438	0.426097	0.052332	0.039280	0.027872	0.026591	0.040621	0.029496	0.033409
mean β	0.961360	0.951781	0.976673	0.975317	0.976275	0.976645	0.975205	0.976093	0.975689
bias β	-0.018640	-0.028219	-0.003327	-0.004683	-0.003725	-0.003355	-0.004795	-0.003907	-0.004311
mse β	0.008904	0.025951	0.000614	0.000053	0.000046	0.000051	0.000067	0.000056	0.000068
mae β	0.039143	0.057390	0.006172	0.005015	0.003846	0.003566	0.005370	0.004078	0.004620
mean σ	0.099607	0.058895	0.147883	0.162567	0.165318	0.152367	0.154270	0.165148	0.149183
bias σ	-0.066093	-0.106805	-0.017817	-0.003133	-0.000382	-0.013333	-0.011430	-0.000552	-0.016517
mse σ	0.018376	0.022620	0.003918	0.002296	0.002296	0.002485	0.002566	0.002073	0.002865
mae σ	0.117220	0.138037	0.022491	0.038325	0.037033	0.038657	0.041356	0.035026	0.041933

TABELA 6. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, T=250

	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.657239	-0.655518	-0.646651	-0.732105	-0.731168	-0.728442	-0.731064	-0.728545	-0.730313
bias α	0.078761	0.080482	0.089349	0.003895	0.004832	0.007558	0.004936	0.007455	0.005687
mse α	0.324049	0.448948	0.321806	0.000529	0.000103	0.000284	0.000186	0.000103	0.000182
mae α	0.431807	0.524950	0.412616	0.013323	0.007189	0.011075	0.009587	0.007935	0.009229
mean β	0.911393	0.911682	0.912914	0.901757	0.901142	0.901871	0.901144	0.901450	0.901280
bias β	0.011393	0.011682	0.012914	0.001757	0.001142	0.001871	0.001144	0.001450	0.001280
mse β	0.005944	0.008215	0.005888	0.000011	0.000004	0.000009	0.000007	0.000005	0.000007
mae β	0.058491	0.070958	0.056019	0.002499	0.001646	0.002257	0.002140	0.001763	0.002053
mean σ	0.246982	0.220967	0.227270	0.381270	0.386004	0.377610	0.374018	0.380753	0.376954
bias σ	-0.115918	-0.141933	-0.135630	0.018370	0.023104	0.014710	0.011118	0.017853	0.014054
mse σ	0.029136	0.041257	0.034827	0.001272	0.001388	0.001484	0.001415	0.001299	0.001300
mae σ	0.146245	0.173349	0.158733	0.027994	0.031482	0.030527	0.031812	0.031192	0.030416

TABELA 7. $\alpha=-0.736$ $\beta=.9$ $\sigma=.3629$, T=1000

FIGURA 5.2. Eficiência Relativa - Efeito do tamanho da amostra - (mse amostra tamanho 250/ mse amostra tamanho 1000)



	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.300991	-0.300362	-0.476716	-0.372371	-0.369634	-0.371808	-0.368965	-0.368831	-0.369742
bias α	0.067009	0.067638	-0.108716	-0.004371	-0.001634	-0.003808	-0.000965	-0.000831	-0.001742
mse α	0.108547	0.154086	0.016805	0.000462	0.000154	0.000212	0.000287	0.000194	0.000300
mae α	0.248294	0.300398	0.110979	0.011809	0.009061	0.010973	0.010886	0.009801	0.010868
mean β	0.959360	0.959477	0.935880	0.949738	0.949870	0.949686	0.949956	0.949983	0.949848
bias β	0.009360	0.009477	-0.014120	-0.000262	-0.000130	-0.000314	-0.000044	-0.000017	-0.000152
mse β	0.002000	0.002828	0.000297	0.000008	0.000003	0.000004	0.000005	0.000003	0.000005
mae β	0.033712	0.040665	0.014485	0.001599	0.001237	0.001470	0.001397	0.001205	0.001375
mean σ	0.156376	0.134259	0.215652	0.264582	0.270840	0.264941	0.260428	0.269523	0.261419
bias σ	-0.103624	-0.125741	-0.044348	0.004582	0.010840	0.004941	0.000428	0.009523	0.001419
mse σ	0.020798	0.028795	0.002460	0.001239	0.001213	0.001342	0.001352	0.001238	0.001391
mae σ	0.122116	0.146295	0.044402	0.027305	0.029037	0.029162	0.030043	0.029670	0.030514

TABELA 8. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, T=1000

	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.114335	-0.119373	-0.150316	-0.173171	-0.164059	-0.163896	-0.174346	-0.164044	-0.165767
bias α	0.032865	0.027827	-0.003116	-0.025971	-0.016859	-0.016696	-0.027146	-0.016844	-0.018567
mse α	0.043901	0.058947	0.004958	0.001341	0.000497	0.000473	0.001637	0.000563	0.001227
mae α	0.146038	0.166462	0.022415	0.027646	0.017471	0.017493	0.029596	0.017999	0.020478
mean β	0.984552	0.983893	0.980499	0.976673	0.977706	0.977774	0.976394	0.977703	0.977488
bias β	0.004552	0.003893	0.000499	-0.003327	-0.002294	-0.002226	-0.003606	-0.002297	-0.002512
mse β	0.000818	0.001091	0.000081	0.000021	0.000010	0.000009	0.000027	0.000012	0.000023
mae β	0.019818	0.022531	0.002246	0.003557	0.002355	0.002325	0.003912	0.002425	0.002743
mean σ	0.078361	0.066519	0.150921	0.174408	0.171587	0.167460	0.173789	0.171004	0.167570
bias σ	-0.087339	-0.099181	-0.014779	0.008708	0.005887	0.001760	0.008089	0.005304	0.001870
mse σ	0.013792	0.016902	0.001312	0.001195	0.000971	0.000976	0.001379	0.000960	0.001094
mae σ	0.104885	0.118200	0.015356	0.026957	0.024514	0.024630	0.029696	0.024281	0.026283

TABELA 9. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, T=1000

de momentos, trabalhando agora com apenas 14 condições de momentos de acordo com a Eq. 2.4 em lugar das 24 condições de momentos originais (Eq. 2.3).

Os resultados desta comparação estão colocados nas Tabelas 10, 11 e 12, e as comparações entre estimadores usando o mse e mae com o uso das 14 condições de momentos colocados na Figura 5.3. Podemos notar que nesta configuração os estimadores de GEL/GMC continuam tendo um desempenho superior aos baseados em GMM, mas agora este desempenho não é tão superior quanto na configuração com 24 condições de momentos, dando suporte a conjectura de um uso superior das condições de momentos em termos de viés e variância para os estimadores da classe GEL/GMC.

Para verificar a importância do aumento do número de instrumentos utilizados, colocamos na Figura 5.4 a eficiência relativa entre o mse utilizando 14 momentos e o estimador com 24 momentos. É possível notar que para os estimadores de GMM ocorrem aumentos modestos ou reduções no mse com o aumento do número de instrumentos, de forma similar aos resultados obtidos no artigos de (ANDERSEN; SORENSEN, 1996), mas em geral ocorrem ganhos de eficiência muito significantes no mse para os estimadores baseados em GEL/GMC, chegando a valores maiores que 200 vezes na segunda configuração de parâmetros. No entanto para a terceira configuração de parâmetros podemos observar que a estimação com um maior número de condições de momentos representa uma diminuição na eficiência relativa de todos os métodos para os estimadores de α e β .

	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.387790	-0.329887	-0.392345	-0.706187	-0.583088	-0.705202	-0.734080	-0.688249	-0.737702
bias α	0.348210	0.406113	0.343655	0.029813	0.152912	0.030798	0.001920	0.047751	-0.001702
mse α	0.407410	0.529764	0.448516	0.030564	0.135697	0.059130	0.018108	0.298280	0.003793
mae α	0.500311	0.579126	0.488393	0.075290	0.240673	0.100716	0.035211	0.243153	0.015571
mean β	0.947847	0.955695	0.947246	0.904431	0.920801	0.905838	0.901287	0.907336	0.901759
bias β	0.047847	0.055695	0.047246	0.004431	0.020801	0.005838	0.001287	0.007336	0.001759
mse β	0.007420	0.009644	0.008133	0.000573	0.002498	0.001141	0.000342	0.005458	0.000083
mae β	0.067970	0.078549	0.066343	0.010849	0.033067	0.015050	0.005682	0.033610	0.003415
mean σ	0.177854	0.141572	0.166061	0.345979	0.256893	0.384320	0.376598	0.293342	0.398028
bias σ	-0.185046	-0.221328	-0.196839	-0.016921	-0.106007	0.021420	0.013698	-0.069558	0.035128
mse σ	0.053409	0.071263	0.057475	0.006115	0.023314	0.006100	0.003235	0.020749	0.002738
mae σ	0.204028	0.240183	0.213535	0.061064	0.125973	0.061736	0.045643	0.110763	0.044111

TABELA 10. $\alpha=-0.736$ $\beta=.9$ $\sigma=.3629$, Subconjunto de Instrumentos

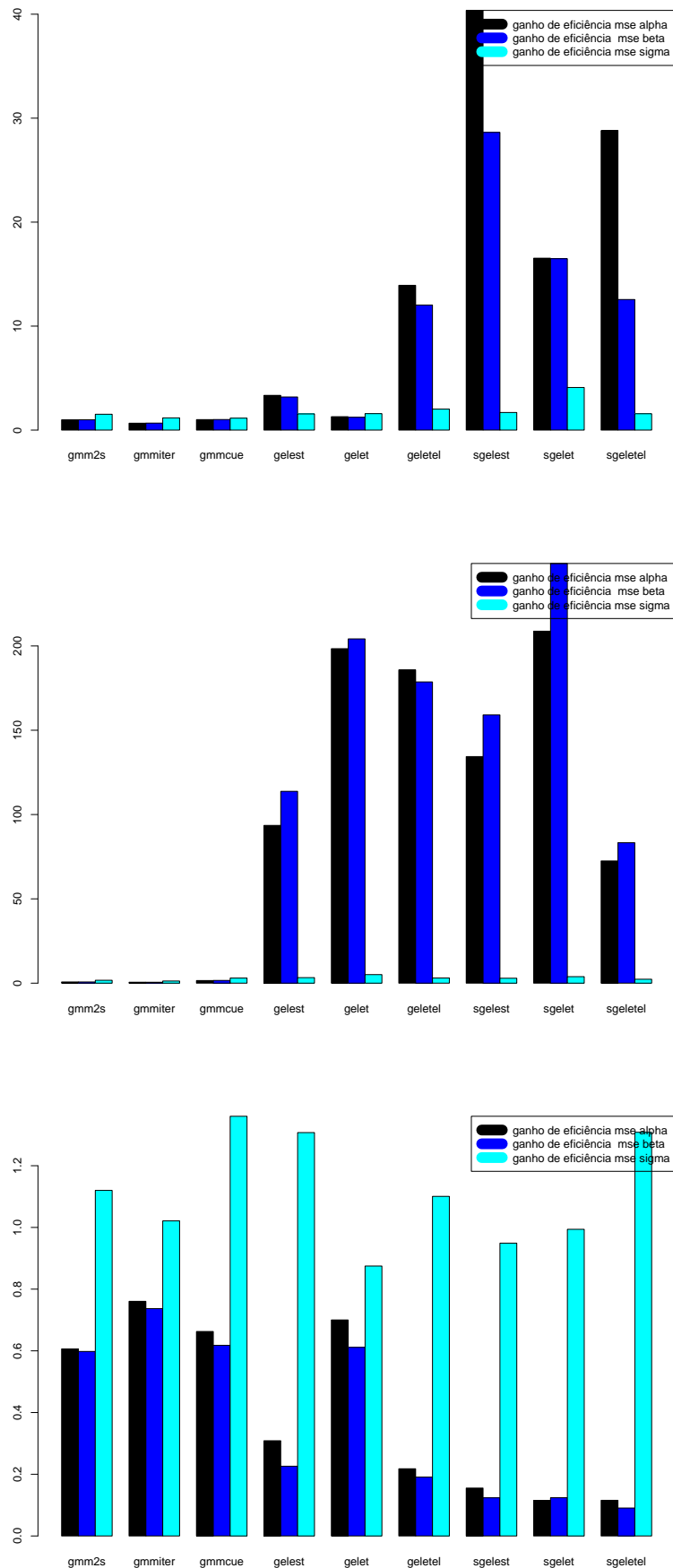
	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.176010	-0.167857	-0.424666	-0.371692	-0.361446	-0.367182	-0.372239	-0.362772	-0.367428
bias α	0.191990	0.200143	-0.056666	-0.003692	0.006554	0.000818	-0.004239	0.005228	0.000572
mse α	0.226799	0.303138	0.012526	0.000276	0.000203	0.000169	0.000345	0.000091	0.000117
mae α	0.323536	0.349715	0.070120	0.010155	0.010376	0.008243	0.012456	0.006924	0.006971
mean β	0.976343	0.977480	0.942910	0.951056	0.951271	0.950586	0.951122	0.951025	0.950734
bias β	0.026343	0.027480	-0.007090	0.001056	0.001271	0.000586	0.001122	0.001025	0.000734
mse β	0.004069	0.005476	0.000219	0.000010	0.000006	0.000006	0.000010	0.000003	0.000004
mae β	0.043860	0.047336	0.009105	0.002251	0.001941	0.001689	0.002211	0.001380	0.001501
mean σ	0.100259	0.081734	0.214449	0.289414	0.269170	0.284782	0.285166	0.281602	0.292884
bias σ	-0.159741	-0.178266	-0.045551	0.029414	0.009170	0.024782	0.025166	0.021602	0.032884
mse σ	0.037548	0.044987	0.003587	0.001766	0.001190	0.001708	0.001545	0.001222	0.002284
mae σ	0.176449	0.195545	0.046372	0.032133	0.027369	0.030589	0.029887	0.028479	0.035764

TABELA 11. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, Subconjunto de Instrumentos

	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.089063	-0.092245	-0.146779	-0.160451	-0.160487	-0.152710	-0.158337	-0.151514	-0.154633
bias α	0.058137	0.054955	0.000421	-0.013251	-0.013287	-0.005510	-0.011137	-0.004314	-0.007433
mse α	0.074543	0.137264	0.004951	0.000839	0.000555	0.000188	0.000673	0.000117	0.000291
mae α	0.163815	0.178350	0.028959	0.017083	0.015205	0.007540	0.016316	0.006146	0.010725
mean β	0.988033	0.987660	0.980816	0.979301	0.978390	0.979612	0.979438	0.979615	0.979451
bias β	0.008033	0.007660	0.000816	-0.000699	-0.001610	-0.000388	-0.000562	-0.000385	-0.000549
mse β	0.001332	0.002385	0.000081	0.000010	0.000011	0.000003	0.000009	0.000003	0.000004
mae β	0.022137	0.024041	0.003246	0.001962	0.002243	0.001172	0.001775	0.001188	0.001340
mean σ	0.056143	0.047436	0.146157	0.196089	0.176797	0.191231	0.189516	0.186095	0.196360
bias σ	-0.109557	-0.118264	-0.019543	0.030389	0.011097	0.025531	0.023816	0.020395	0.030660
mse σ	0.018120	0.020777	0.002100	0.002081	0.001214	0.001677	0.001812	0.001431	0.002110
mae σ	0.126418	0.135976	0.020115	0.033161	0.026940	0.029457	0.029030	0.028479	0.034580

TABELA 12. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, Subconjunto de Instrumentos

FIGURA 5.4. Eficiência Relativa - Efeito do número de momentos - (mse 14 momentos/ mse 24 momentos)



	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.898594	-0.840806	-0.807848	-0.704411	-0.710422	-0.711583	-0.727019	-0.752694	-0.725200
bias α	-0.162594	-0.104806	-0.071848	0.031589	0.025578	0.024417	0.008981	-0.016694	0.010800
mse α	0.390480	0.981390	0.843844	0.031866	0.142569	0.013417	0.002774	0.072544	0.000397
mae α	0.421985	0.677693	0.578302	0.077138	0.211659	0.044133	0.016357	0.072182	0.014560
mean β	0.880334	0.887774	0.892161	0.903264	0.902588	0.903792	0.899936	0.896904	0.900473
bias β	-0.019666	-0.012226	-0.007839	0.003264	0.002588	0.003792	-0.000064	-0.003096	0.000473
mse β	0.006902	0.017631	0.015195	0.000610	0.002765	0.000260	0.000052	0.001422	0.000007
mae β	0.056283	0.090791	0.078059	0.010621	0.029255	0.006682	0.001934	0.009835	0.001803
mean σ	0.411426	0.276272	0.277088	0.365962	0.330249	0.392250	0.401249	0.387742	0.398329
bias σ	0.048526	-0.086628	-0.085812	0.003062	-0.032651	0.029350	0.038349	0.024842	0.035429
mse σ	0.035925	0.046839	0.039294	0.005068	0.012450	0.004109	0.002003	0.004555	0.001863
mae σ	0.144036	0.179405	0.162927	0.053270	0.085005	0.051261	0.041188	0.051046	0.039298

TABELA 13. $\alpha=-0.736$ $\beta=.9$ $\sigma=.3629$, Inovações Student(4) na média

5.2. Experimento 2 - Distribuição Student-t (4) nas inovações da média. Como discutimos anteriormente embora o modelo SV log-normal esteja definido através de momentos de uma distribuição log-normal, ele ser interpretado de forma semi-paramétrica como um modelo autoregressivo para o exponencial do processo de volatilidade, sem que seja necessário a especificação de uma distribuição para os processos de inovação (e.g. (FRANCQ; ZAKOÏAN, 2006), (RENAULT, 2009)). Mas como estamos utilizando estes momentos teóricos assumindo a especificação da distribuição das inovações na construção das condições de momentos é importante verificar se especificações alternativas alteram de forma significativa as propriedades dos estimadores em amostras finitas. Em especial é interessante verificar se processos com caudas pesadas, em consistência com o observado para séries financeiras, afetam estes estimadores.

A primeira análise realizada foi substituir a distribuição normal padrão nas inovações do processo da média para uma distribuição Student t com 4 graus de liberdade. Esta escolha propositalmente em o objetivo de verificar o efeito de uma distribuição com caudas mais pesadas na estimação dos modelos de volatilidade estocástica. Note que como estamos utilizando momentos de potências elevadas o efeito de caudas pesadas pode ser magnificado na estimação, já que agora cada observação é elevada a potências de ordens 2, 3 e 4. Em especial utilizamos este número de 4 graus de liberdade na Student-t para configurar uma distribuição com curtose não finita e assim um teste mais extremo de robustez na estimação.

As Tabelas 13, 14 e 15 mostram os resultados deste experimento com o uso de 24 condições de momentos e as Tabelas 16, 17 e 18 utilizando 14 condições de momentos. É possível ver que nesta situação claramente os estimadores baseados em GMC/GEL mantém seu domínio sobre os estimadores baseados em GMM, como fica mais evidente nas Figuras 5.5 e 5.6 que mostram o mse e o mae de cada estimador, e novamente temos o mesmo resultado de um melhor desempenho dos estimadores baseados em GEL/GMC nesta situação.

Uma questão importante é verificar se nesta situação é vantajoso trabalhar com o conjunto maior de instrumentos, e para analisar este problema realizamos uma comparação da eficiência relativa medida pela razão do mse entre os estimadores com 14 e 24 condições de momentos, mostrado na Figura 5.7. Os resultados neste experimento mostram que nesta situação o aumento do número de instrumentos pode prejudicar o desempenho do estimadores, e este efeito ocorre tanto para estimadores de GMM quanto GEL/GMC, embora o efeito seja heterogêneo em termos da configuração e do parâmetro analisado. Na situação de menor persistência é vantajoso trabalhar com o maior número de instrumentos para os estimadores GEL/GMC, mas esse resultado não se mantém nas demais configurações de parâmetros, e em especial na configuração com maior persistência o uso do conjunto de instrumentos ocorre uma degradação quase geral no desempenho de todos os métodos.

5.3. Experimento 3 - Distribuição Student-t (4) nas inovações da volatilidade. No próximo experimento modificamos o processo gerador dos dados, agora assumindo que o processo de inovações na equação da volatilidade é dado por uma Student-t com 4 graus de liberdade, e neste caso assumimos o pressuposto usual que o processo de inovações da média é uma normal padrão. Note que nesta configuração é esperado que os efeitos sejam mais prejudiciais, já que agora o efeito

	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.418591	-0.409907	-0.436561	-0.366868	-0.364062	-0.366793	-0.365613	-0.364053	-0.365115
bias α	-0.050591	-0.041907	-0.068561	0.001132	0.003938	0.001207	0.002387	0.003947	0.002885
mse α	0.162877	0.504704	0.016724	0.000260	0.000175	0.000259	0.000197	0.000180	0.000215
mae α	0.268665	0.420585	0.078071	0.012478	0.010332	0.012119	0.010687	0.010435	0.010866
mean β	0.944253	0.945494	0.941962	0.950021	0.950277	0.949960	0.950228	0.950265	0.950229
bias β	-0.005747	-0.004506	-0.008038	0.000021	0.000277	-0.000040	0.000228	0.000265	0.000229
mse β	0.002946	0.008605	0.000312	0.000005	0.000002	0.000005	0.000003	0.000003	0.000003
mae β	0.036112	0.056316	0.009965	0.001655	0.001184	0.001629	0.001271	0.001118	0.001276
mean σ	0.258888	0.163107	0.230616	0.308080	0.304090	0.304898	0.305641	0.302799	0.303441
bias σ	-0.001112	-0.096893	-0.029384	0.048080	0.044090	0.044898	0.045641	0.042799	0.043441
mse σ	0.022531	0.036115	0.002240	0.004447	0.003247	0.003896	0.004327	0.003056	0.003854
mae σ	0.120120	0.160839	0.033712	0.053685	0.047893	0.051585	0.053479	0.047292	0.051053

TABELA 14. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, Inovações Student(4) na média

	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.182803	-0.207332	-0.153876	-0.178418	-0.172451	-0.171749	-0.179504	-0.174035	-0.173768
bias α	-0.035603	-0.060132	-0.006676	-0.031218	-0.025251	-0.024549	-0.032304	-0.026835	-0.026568
mse α	0.064698	0.362934	0.015031	0.001764	0.001905	0.001836	0.001910	0.002270	0.002064
mae α	0.162150	0.250030	0.023437	0.032214	0.025756	0.025222	0.033189	0.027654	0.027348
mean β	0.975580	0.972639	0.979965	0.975852	0.976312	0.976454	0.975630	0.976079	0.976160
bias β	-0.004420	-0.007361	-0.000035	-0.004148	-0.003688	-0.003546	-0.004370	-0.003921	-0.003840
mse β	0.001189	0.005761	0.000260	0.000027	0.000049	0.000047	0.000031	0.000058	0.000052
mae β	0.021753	0.033207	0.002463	0.004285	0.003778	0.003645	0.004497	0.004054	0.003948
mean σ	0.141434	0.087524	0.153574	0.206849	0.202369	0.199885	0.205119	0.203117	0.200861
bias σ	-0.024266	-0.078176	-0.012126	0.041150	0.036669	0.034185	0.039419	0.037417	0.035161
mse σ	0.013726	0.021573	0.001190	0.003876	0.003752	0.003589	0.003721	0.004012	0.003858
mae σ	0.099130	0.127428	0.013556	0.048306	0.044964	0.044559	0.048999	0.045614	0.045999

TABELA 15. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, Inovações Student(4) na média

	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.489227	-0.409877	-0.414510	-0.645279	-0.527524	-0.688817	-0.732088	-0.636541	-0.725662
bias α	0.246773	0.326123	0.321490	0.090721	0.208476	0.047183	0.003912	0.099459	0.010338
mse α	0.294811	0.598153	0.570777	0.062880	0.157706	0.159874	0.034620	0.208947	0.001027
mae α	0.447530	0.597699	0.566140	0.135388	0.277889	0.169003	0.050133	0.260987	0.019382
mean β	0.934580	0.945279	0.944608	0.911168	0.927605	0.905506	0.899820	0.913821	0.901443
bias β	0.034579	0.045279	0.044608	0.011168	0.027605	0.005506	-0.000180	0.013821	0.001443
mse β	0.005378	0.010677	0.010224	0.001163	0.002921	0.003044	0.000682	0.003908	0.000023
mae β	0.060665	0.080809	0.076761	0.018336	0.037783	0.023940	0.006913	0.035885	0.002971
mean σ	0.290529	0.203847	0.211820	0.352261	0.299423	0.379088	0.388014	0.323308	0.398034
bias σ	-0.072371	-0.159053	-0.151080	-0.010639	-0.063477	0.016188	0.025114	-0.039592	0.035134
mse σ	0.040188	0.061685	0.053119	0.009106	0.022248	0.008340	0.003194	0.019586	0.002666
mae σ	0.161437	0.214730	0.199325	0.073127	0.118990	0.069374	0.045031	0.103051	0.043476

TABELA 16. $\alpha=-0.736$ $\beta=.9$ $\sigma=.3629$, Inovações Student(4) na média, Subconjunto de Instrumentos

FIGURA 5.5. Experimento 2 - Student-t (4) na Média - 24 Condições de Momentos

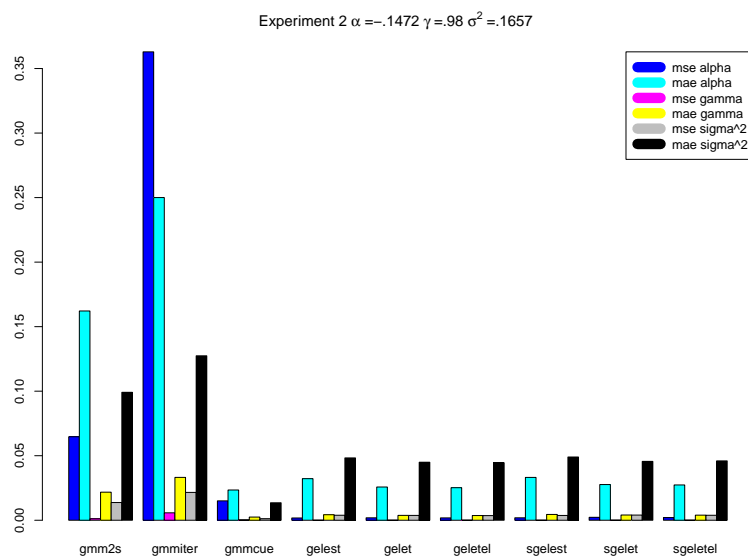
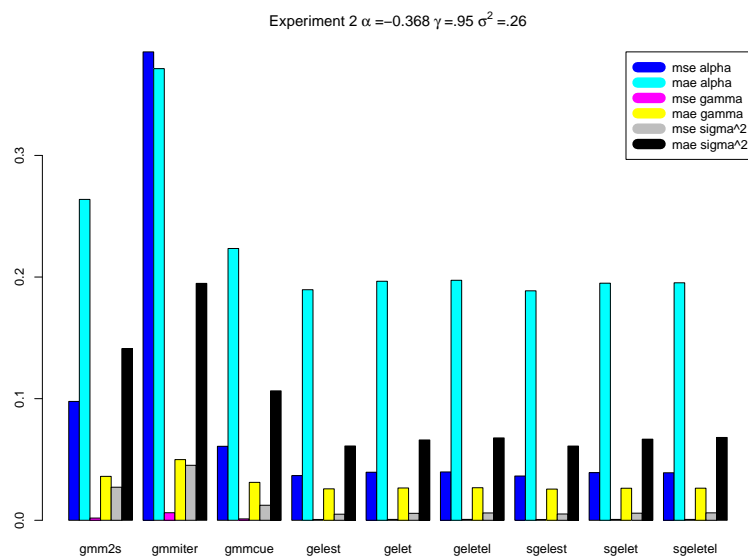
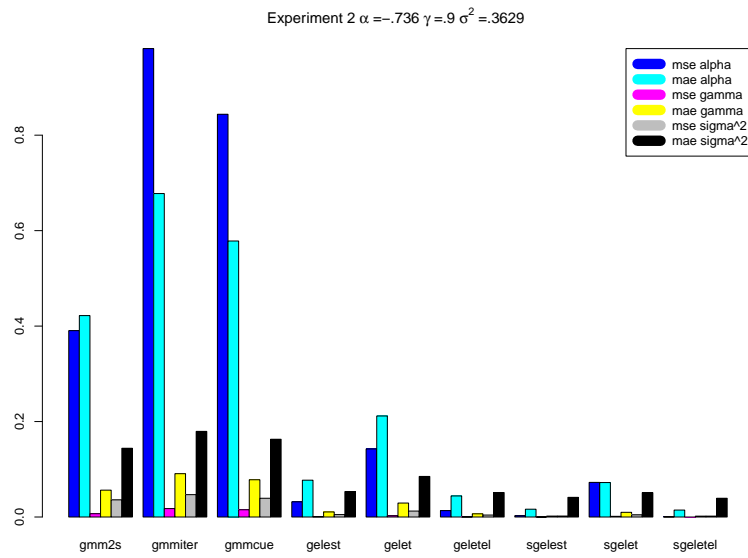


FIGURA 5.6. Experimento 2 - Student-t (4) na Média - 14 Condições de Momentos

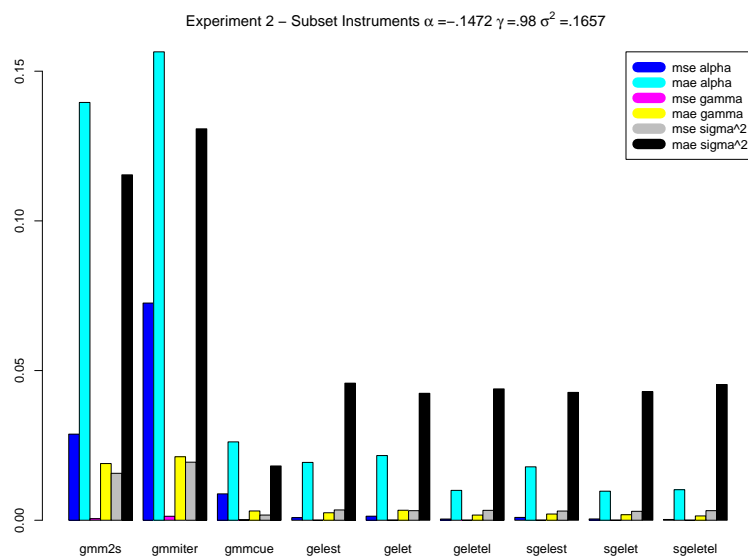
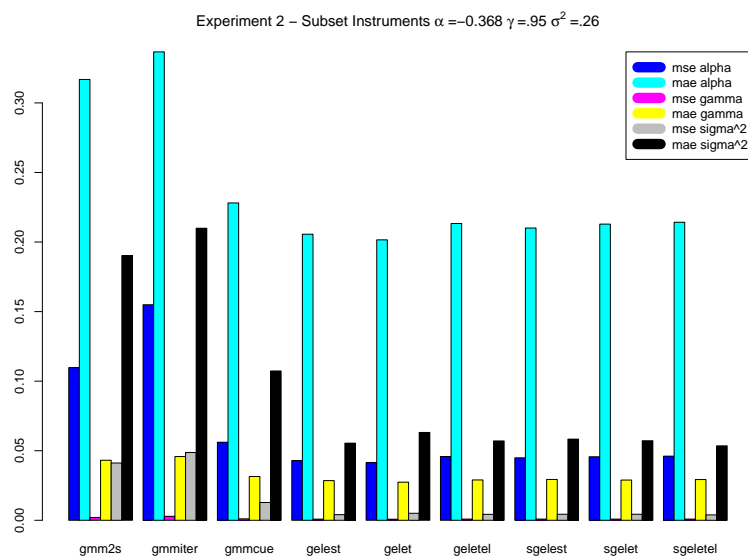
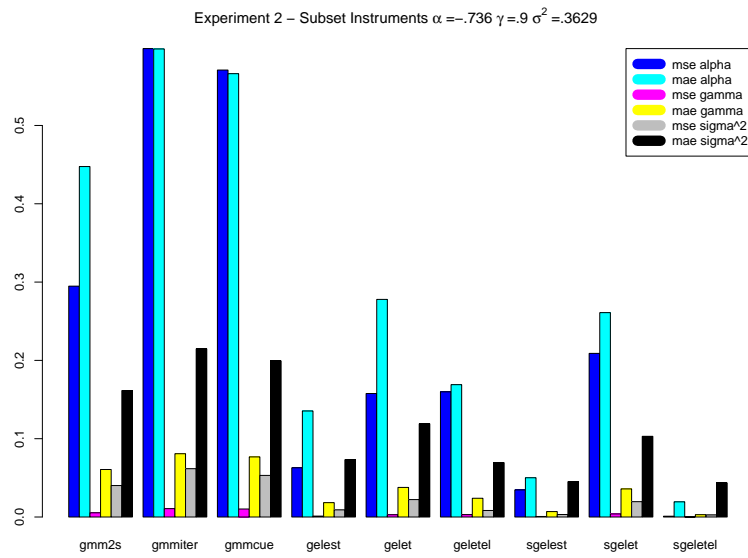
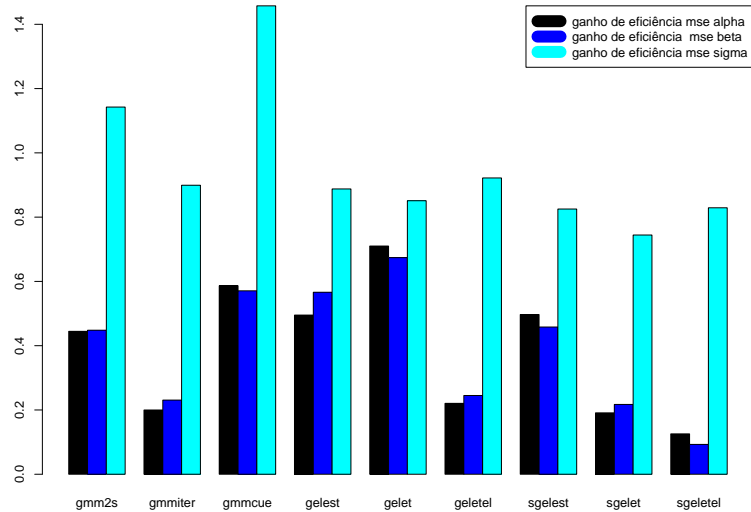
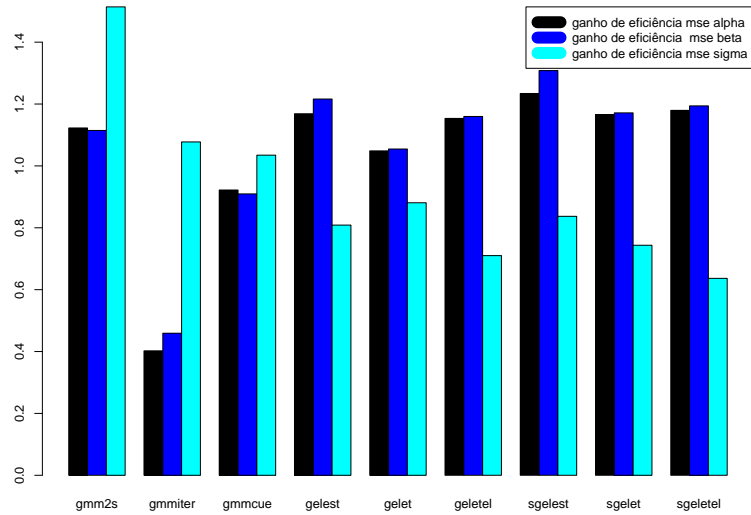
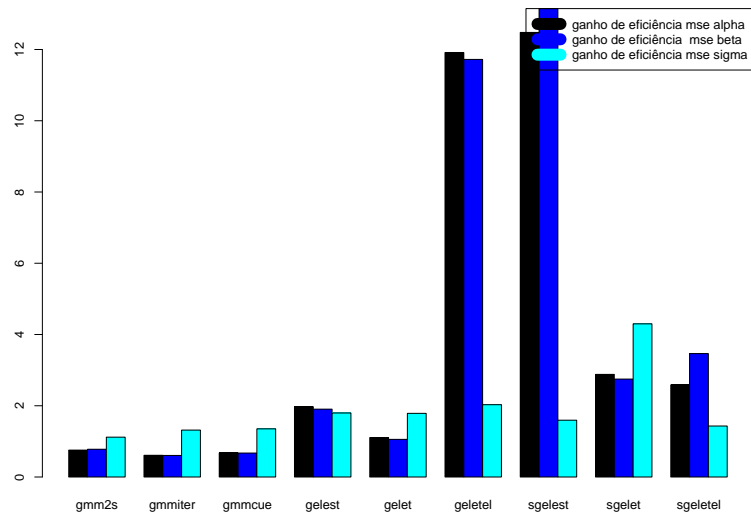


FIGURA 5.7. Eficiência Relativa - Student-t (4) na Média - (mse 14 momentos/ mse 24 momentos)



	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.212205	-0.188704	-0.381028	-0.370669	-0.361173	-0.367182	-0.373580	-0.361736	-0.366302
bias α	0.155795	0.179296	-0.013028	-0.002669	0.006827	0.000818	-0.005580	0.006264	0.001698
mse α	0.151073	0.250103	0.004146	0.000320	0.000217	0.000351	0.000469	0.000131	0.000170
mae α	0.289612	0.348350	0.041639	0.011552	0.011170	0.011661	0.014248	0.008588	0.008391
mean β	0.971552	0.974813	0.949139	0.950362	0.950847	0.949851	0.950648	0.950749	0.950230
bias β	0.021552	0.024813	-0.000861	0.000362	0.000847	-0.000149	0.000648	0.000749	0.000230
mse β	0.002782	0.004466	0.000074	0.000012	0.000006	0.000011	0.000011	0.000004	0.000006
mae β	0.039291	0.047117	0.005421	0.002340	0.001886	0.002199	0.002342	0.001441	0.001700
mean σ	0.163153	0.114320	0.248484	0.311227	0.304519	0.310048	0.310693	0.303892	0.307685
bias σ	-0.096847	-0.145680	-0.011516	0.051227	0.044518	0.050048	0.050693	0.043892	0.047685
mse σ	0.030464	0.042008	0.001299	0.004046	0.003705	0.004212	0.004070	0.002848	0.003464
mae σ	0.149490	0.184456	0.024816	0.052409	0.048864	0.051927	0.052690	0.045343	0.048842

TABELA 17. $\alpha=-0.736$ $\beta=.9$ $\sigma=.3629$, Inovações Student(4) na média, Subconjunto de Instrumentos

	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.074284	-0.071013	-0.150531	-0.162376	-0.166849	-0.154689	-0.158033	-0.155149	-0.153788
bias α	0.072916	0.076187	-0.003331	-0.015176	-0.019649	-0.007489	-0.010833	-0.007949	-0.006588
mse α	0.028767	0.072554	0.008817	0.000874	0.001352	0.000405	0.000949	0.000434	0.000259
mae α	0.139566	0.156468	0.026179	0.019321	0.021606	0.009982	0.017845	0.009705	0.010202
mean β	0.989995	0.990442	0.980081	0.978495	0.977240	0.978996	0.979339	0.978898	0.979279
bias β	0.009995	0.010442	0.000081	-0.001505	-0.002760	-0.001004	-0.000661	-0.001102	-0.000721
mse β	0.000533	0.001329	0.000149	0.000016	0.000033	0.000011	0.000014	0.000013	0.000005
mae β	0.018938	0.021213	0.003100	0.002503	0.003344	0.001732	0.002077	0.001849	0.001444
mean σ	0.077686	0.057410	0.154182	0.209621	0.203023	0.207680	0.206146	0.205631	0.209157
bias σ	-0.088014	-0.108290	-0.011518	0.043921	0.037323	0.041980	0.040446	0.039931	0.043457
mse σ	0.015682	0.019399	0.001735	0.003441	0.003193	0.003309	0.003071	0.002986	0.003199
mae σ	0.115388	0.130757	0.018132	0.045794	0.042404	0.043876	0.042707	0.042980	0.045337

TABELA 18. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, Inovações Student(4) na média, Subconjunto de Instrumentos

da caudas mais pesadas é propagado diretamente pela estrutura autoregressiva da equação da volatilidade, de forma distinta do caso anterior aonde as inovações com caudas pesadas afetavam a equação da média, que era um processo sem correlação.

As Tabelas 19, 20 e 21 mostram os resultados obtidos com 24 condições de momentos, e as Tabelas 22, 23 e 24 utilizando 14 condições de momentos, e resumizamos estes resultados com as Figuras 5.8 e 5.9. Podemos notar que efetivamente estas inovações com caudas mais pesadas prejudicam bastante o desempenho dos estimadores baseados em GMM e de forma moderada os estimadores baseados em GEL. Mas neste experimento ficam evidentes as propriedades de robustez dos métodos baseados em *Exponential Tilting* e *Exponentially Tilted Empirical Likelihood*, que tem um desempenho em geral bastante superior aos demais métodos. Por exemplo a razão entre o mse para α calculado por GMM Iterativo e pelo método ETEL com suavização tem valor de 5102.984 para a primeira configuração de parâmetros, mostrando a dominância destes métodos nesta situação de especificação incorreta. Como discutido anteriormente esta propriedade de robustez é derivada da função de influência limitada dos estimadores baseados em Exponential Tilting, que se mostra bastante importante nesta situação. Como dados financeiros são caracterizados por caudas pesadas, temos uma justificativa adicional para o uso dos estimadores propostos neste artigo.

Da mesma forma, podemos verificar os efeitos do uso de um maior número de condições de momentos nesta configuração. A Figura 5.10 mostra os efeitos na eficiência relativa dos estimadores obtido com o aumento do número de instrumentos de 14 para 24. No entanto nesta configuração os resultados são mistos, já que para a primeira configuração de parâmetros existe

	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-2.019463	-2.019004	-1.353874	-0.719185	-0.878625	-0.718273	-0.726762	-0.874355	-0.715406
bias α	-1.283463	-1.283004	-0.617874	0.016815	-0.142625	0.017727	0.009238	-0.138355	0.020594
mse α	5.053566	6.598158	3.044399	0.058803	0.680573	0.015097	0.016660	0.644231	0.001293
mae α	1.475510	1.659492	1.051613	0.099185	0.432671	0.048763	0.039363	0.277956	0.024200
mean β	0.720150	0.719250	0.811384	0.898652	0.876085	0.900611	0.897372	0.877314	0.899777
bias β	-0.179850	-0.180750	-0.088616	-0.001348	-0.023915	0.000611	-0.002628	-0.022686	-0.000223
mse β	0.097458	0.128318	0.059642	0.001216	0.013893	0.000300	0.000337	0.012709	0.000020
mae β	0.205075	0.231269	0.146937	0.013264	0.060945	0.006534	0.004285	0.038086	0.002403
mean σ	0.532352	0.431597	0.357978	0.366275	0.346430	0.393303	0.397762	0.381166	0.397085
bias σ	0.169452	0.068697	-0.004922	0.003375	-0.016470	0.030403	0.034862	0.018266	0.034185
mse σ	0.109984	0.085714	0.058204	0.005314	0.023325	0.003714	0.002450	0.014768	0.001909
mae σ	0.251868	0.239819	0.198540	0.051763	0.111622	0.047475	0.043035	0.079160	0.038535

TABELA 19. $\alpha=-0.736$ $\beta=.9$ $\sigma=.3629$, Inovações Student(4) na variância

	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-1.531838	-1.505341	-0.411598	-0.363040	-0.356509	-0.360347	-0.357152	-0.355783	-0.356305
bias α	-1.163838	-1.137341	-0.043598	0.004960	0.011491	0.007653	0.010848	0.012217	0.011695
mse α	4.582102	5.703206	0.006206	0.000298	0.000293	0.000355	0.000448	0.000265	0.000321
mae α	1.265176	1.353192	0.048679	0.013481	0.015033	0.015479	0.015028	0.014312	0.015145
mean β	0.786817	0.789921	0.942956	0.949416	0.949709	0.949327	0.949691	0.949781	0.949705
bias β	-0.163183	-0.160079	-0.007044	-0.000584	-0.000291	-0.000673	-0.000309	-0.000219	-0.000295
mse β	0.089675	0.112105	0.000128	0.000005	0.000002	0.000005	0.000005	0.000002	0.000003
mae β	0.176775	0.189182	0.007696	0.001525	0.001065	0.001646	0.001189	0.000972	0.001124
mean σ	0.438012	0.340150	0.227405	0.294889	0.292910	0.290458	0.282838	0.292852	0.281492
bias σ	0.178012	0.080150	-0.032595	0.034889	0.032910	0.030458	0.022838	0.032852	0.021492
mse σ	0.111763	0.085479	0.001741	0.002467	0.001768	0.002375	0.001898	0.001811	0.001844
mae σ	0.241064	0.225776	0.034656	0.041202	0.037140	0.040675	0.036961	0.038883	0.037063

TABELA 20. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, Inovações Student(4) na variância

	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-1.183910	-1.169166	-0.139778	-0.169468	-0.177636	-0.176430	-0.171889	-0.177510	-0.180039
bias α	-1.036710	-1.021966	0.007422	-0.022268	-0.030436	-0.029230	-0.024689	-0.030310	-0.032839
mse α	4.167620	5.284636	0.002062	0.000871	0.003163	0.003335	0.001260	0.002726	0.003574
mae α	1.083632	1.122330	0.019276	0.022964	0.030810	0.030064	0.026382	0.030722	0.033550
mean β	0.833844	0.835416	0.981116	0.976373	0.974736	0.974993	0.975766	0.974741	0.974392
bias β	-0.146156	-0.144584	0.001116	-0.003627	-0.005264	-0.005007	-0.004234	-0.005259	-0.005608
mse β	0.083851	0.106097	0.000032	0.000019	0.000090	0.000091	0.000030	0.000079	0.000099
mae β	0.152473	0.158181	0.002408	0.003689	0.005304	0.005093	0.004429	0.005307	0.005681
mean σ	0.340019	0.254258	0.148694	0.191014	0.199949	0.194585	0.182533	0.197417	0.188237
bias σ	0.174319	0.088558	-0.017006	0.025314	0.034249	0.028885	0.016833	0.031717	0.022537
mse σ	0.097556	0.071992	0.001456	0.001879	0.003394	0.003096	0.001858	0.003056	0.002708
mae σ	0.222331	0.195336	0.017893	0.033934	0.042568	0.040125	0.033289	0.041190	0.037962

TABELA 21. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, Inovações Student(4) na variância

	gmm2s	gmmiter	gmmcuc	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-1.624080	-1.558604	-1.060265	-0.734392	-0.676903	-0.956436	-0.853334	-1.077795	-0.725856
bias α	-0.888080	-0.822604	-0.324265	0.001608	0.059097	-0.220436	-0.117334	-0.341795	0.010144
mse α	3.928852	4.590728	2.015175	0.173709	0.230651	0.815326	0.491227	1.434573	0.088954
mae α	1.200330	1.292493	0.849144	0.137095	0.238348	0.374986	0.176277	0.537670	0.045287
mean β	0.773478	0.782450	0.851910	0.896662	0.905272	0.864619	0.879744	0.849333	0.899025
bias β	-0.126522	-0.117550	-0.048090	-0.003338	0.005272	-0.035381	-0.020256	-0.050667	-0.000975
mse β	0.077261	0.090068	0.039782	0.003338	0.004464	0.017650	0.009865	0.027960	0.001882
mae β	0.167782	0.180375	0.118296	0.018190	0.032246	0.054444	0.023862	0.074613	0.005793
mean σ	0.490207	0.430327	0.370190	0.380871	0.359469	0.428566	0.398392	0.407583	0.403044
bias σ	0.127307	0.067427	0.007290	0.017971	-0.003431	0.065666	0.035492	0.044683	0.040144
mse σ	0.097302	0.093233	0.060965	0.007639	0.015327	0.017199	0.006391	0.031044	0.003633
mae σ	0.226197	0.236678	0.191858	0.061614	0.091534	0.096654	0.051057	0.117093	0.048806

TABELA 22. $\alpha=-0.736$ $\beta=.9$ $\sigma=.3629$, Inovações Student(4) na variância, Subconjunto de Instrumentos

	gmm2s	gmmiter	gmmcuc	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-1.197984	-1.098225	-0.361745	-0.370533	-0.361434	-0.368460	-0.371025	-0.358880	-0.365012
bias α	-0.829984	-0.730225	0.006255	-0.002533	0.006566	-0.000460	-0.003025	0.009120	0.002988
mse α	3.604356	3.690784	0.001912	0.000341	0.000276	0.000471	0.000384	0.000188	0.000241
mae α	0.987495	0.971869	0.017620	0.011394	0.013219	0.015002	0.012487	0.011009	0.010551
mean β	0.832283	0.845932	0.949841	0.949360	0.949605	0.948366	0.950019	0.949814	0.949038
bias β	-0.117717	-0.104068	-0.000159	-0.000640	-0.000395	-0.001634	0.000019	-0.000186	-0.000962
mse β	0.071710	0.073722	0.000037	0.000010	0.000007	0.000016	0.000007	0.000002	0.000007
mae β	0.138731	0.136549	0.002583	0.002030	0.001903	0.002706	0.001824	0.001152	0.001797
mean σ	0.387174	0.328301	0.261493	0.316921	0.301799	0.312991	0.310528	0.307241	0.316634
bias σ	0.127174	0.068301	0.001493	0.056921	0.041799	0.052991	0.050528	0.047241	0.056634
mse σ	0.092473	0.081984	0.001088	0.004417	0.002851	0.004073	0.003565	0.002990	0.004241
mae σ	0.208110	0.207164	0.019947	0.057437	0.045345	0.054480	0.051266	0.049407	0.057532

TABELA 23. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, Inovações Student(4) na variância, Subconjunto de Instrumentos

	gmm2s	gmmiter	gmmcuc	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-1.013611	-0.966006	-0.160485	-0.162815	-0.170481	-0.159132	-0.158832	-0.158234	-0.152619
bias α	-0.866411	-0.818806	-0.013285	-0.015615	-0.023281	-0.011932	-0.011632	-0.011034	-0.005419
mse α	4.022485	4.187654	0.038329	0.001189	0.001502	0.007726	0.001482	0.000565	0.000261
mae α	0.936151	0.921012	0.031955	0.018731	0.024269	0.014440	0.015531	0.013051	0.008082
mean β	0.857288	0.863844	0.977562	0.977898	0.976214	0.977718	0.978634	0.977919	0.978892
bias β	-0.122712	-0.116156	-0.002438	-0.002102	-0.003786	-0.002282	-0.001366	-0.002081	-0.001108
mse β	0.080732	0.084098	0.000880	0.000030	0.000039	0.000203	0.000033	0.000017	0.000008
mae β	0.132099	0.129967	0.004854	0.002841	0.003945	0.002639	0.002217	0.002398	0.001452
mean σ	0.304510	0.262075	0.168088	0.211233	0.203048	0.207656	0.205108	0.212755	0.214762
bias σ	0.138810	0.096375	0.002388	0.045533	0.037349	0.041956	0.039408	0.047055	0.049062
mse σ	0.086786	0.077900	0.002828	0.003107	0.002707	0.003095	0.002736	0.003547	0.003678
mae σ	0.201054	0.195892	0.017739	0.046314	0.040821	0.043382	0.040756	0.049855	0.050215

TABELA 24. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, Inovações Student(4) na variância, Subconjunto de Instrumentos

FIGURA 5.8. Experimento 3 - Student-t (4) na Volatilidade- 24 Momentos

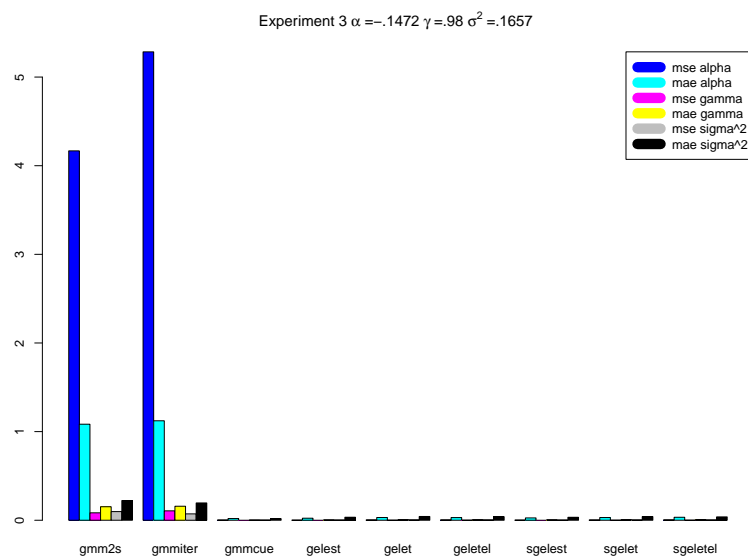
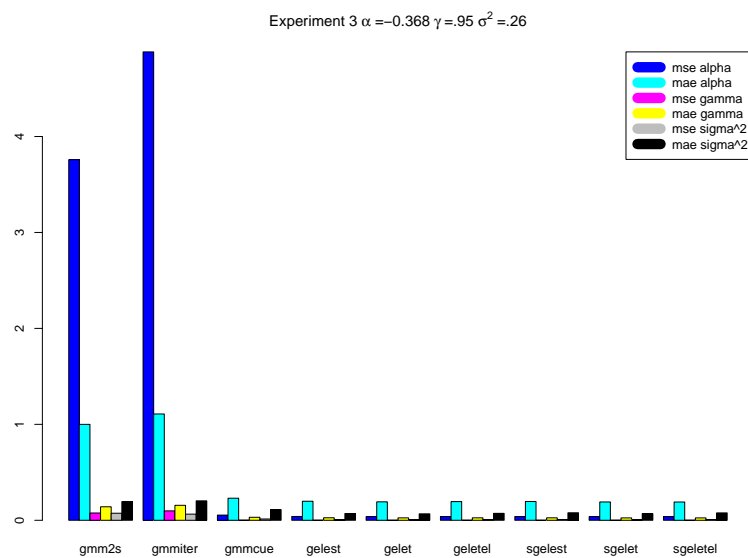
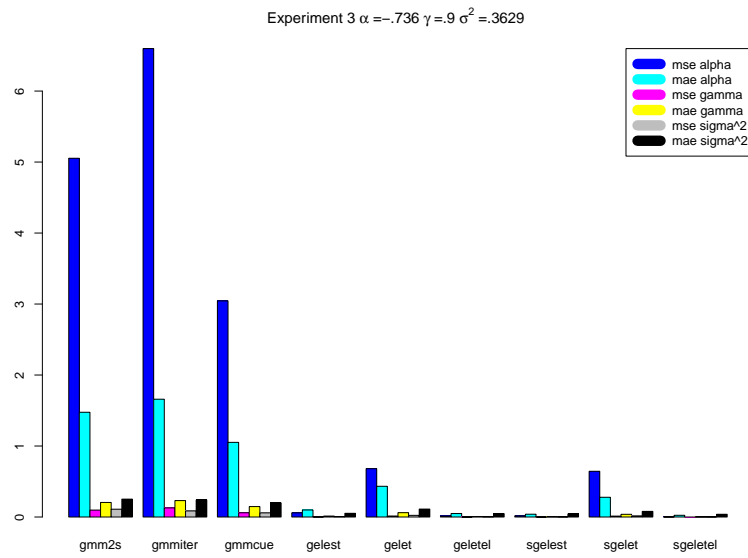
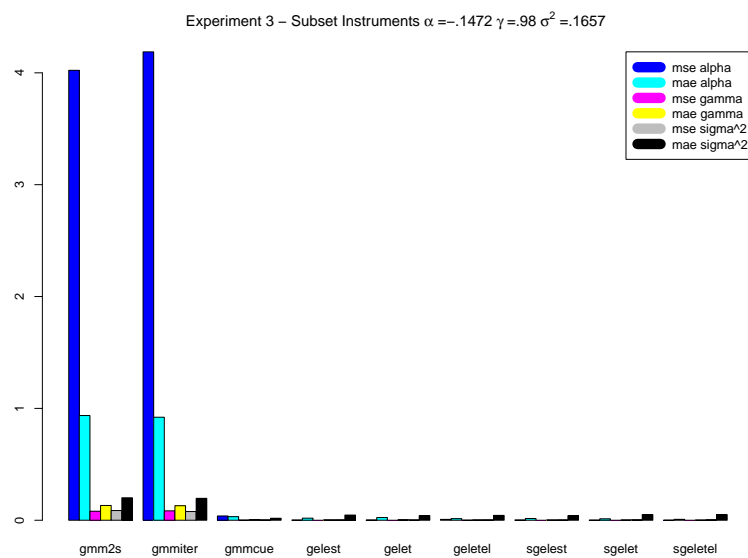
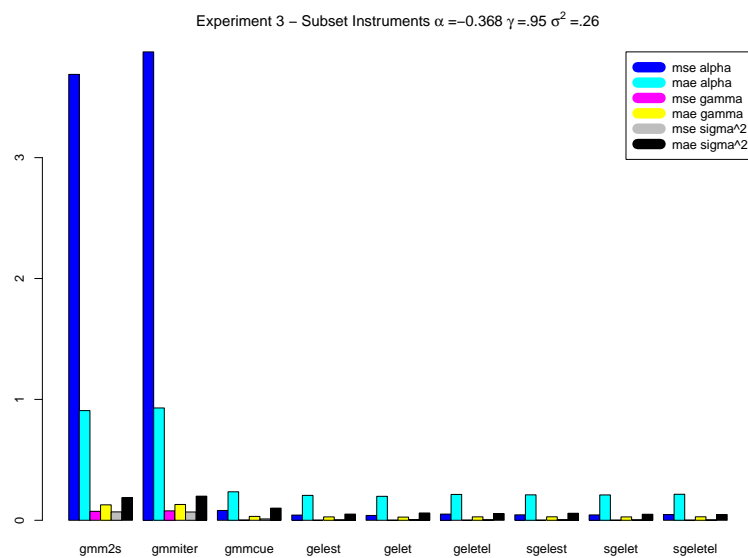
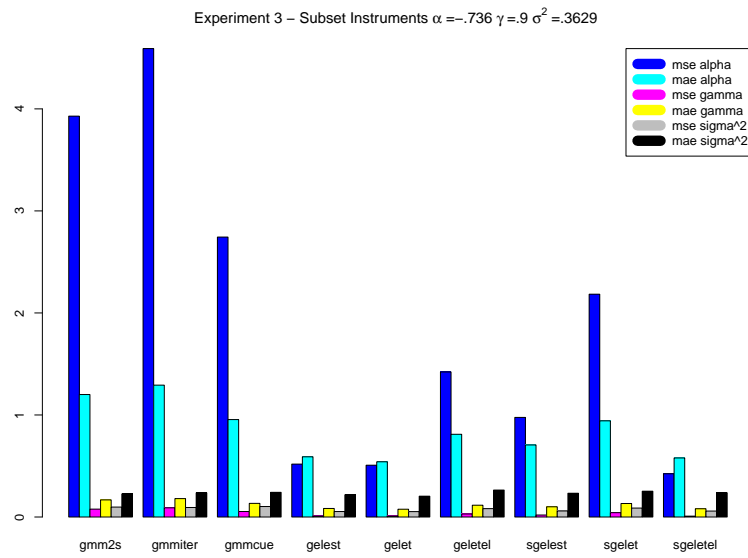


FIGURA 5.9. Experimento 3 - Student-t (4) na Volatilidade- 14 Momentos



	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.896686	-0.921662	-0.796978	-0.728243	-0.835926	-0.729340	-0.734904	-0.757911	-0.732839
bias α	-0.160686	-0.185662	-0.060978	0.007757	-0.099926	0.006660	0.001096	-0.021911	0.003161
mse α	0.758956	1.251152	0.627006	0.029238	0.367820	0.005461	0.001601	0.075302	0.000141
mae α	0.563200	0.764779	0.503486	0.055221	0.350987	0.024025	0.010621	0.085502	0.008789
mean β	0.879116	0.875898	0.892628	0.901656	0.885525	0.903877	0.900704	0.897573	0.901291
bias β	-0.020884	-0.024102	-0.007372	0.001656	-0.014475	0.003877	0.000704	-0.002427	0.001291
mse β	0.013699	0.022533	0.011362	0.000583	0.007103	0.000121	0.000031	0.001436	0.000007
mae β	0.076157	0.103184	0.068596	0.008517	0.048875	0.005174	0.001878	0.012231	0.001886
mean σ	0.287003	0.236533	0.232068	0.355123	0.286266	0.399452	0.397132	0.351652	0.393545
bias σ	-0.075897	-0.126367	-0.130832	-0.007777	-0.076634	0.036552	0.034232	-0.011248	0.030645
mse σ	0.032933	0.049530	0.039221	0.004932	0.019929	0.003515	0.002085	0.008075	0.001812
mae σ	0.150171	0.189751	0.171741	0.055842	0.114077	0.048633	0.041545	0.069468	0.037968

TABELA 25. $\alpha=-0.736$ $\beta=.9$ $\sigma=.3629$, Outlier Média

um ganho geral nos estimadores, embora mais notável para os estimadores baseados em GEL/GMC, mas para as demais configurações existem perdas, em especial na estimação do parâmetro de volatilidade σ na segunda configuração.

5.4. Experimento 4 - Outlier de Nível. Para verificar os efeitos de observações aberrantes (outliers) no processo de estimação de volatilidade estocástica, realizamos duas classes de experimentos. Nesta parte verificamos o efeito de um chamado outliers de nível (Level Outlier na nomenclatura de (HOTTA; TSAY, 1998)) na estimação de modelos de volatilidade estocástica. Neste experimento o processo gerador é dado por:

$$(5.1) \quad y_t = \sigma_t \varepsilon_t + LO_t$$

$$(5.2) \quad \log \sigma_t^2 = \alpha + \beta \log \sigma_{t-1}^2 + \sigma u_t,$$

onde LO_t é uma variável binária com valor positivo de 5 desvios padrões do processo se a observação está no período $t=251$ e zero nas demais observações. Note que neste experimento o outliers não deve afetar de forma direta a persistência na volatilidade do processo, já que ele entra de forma direta apenas na equação da média.

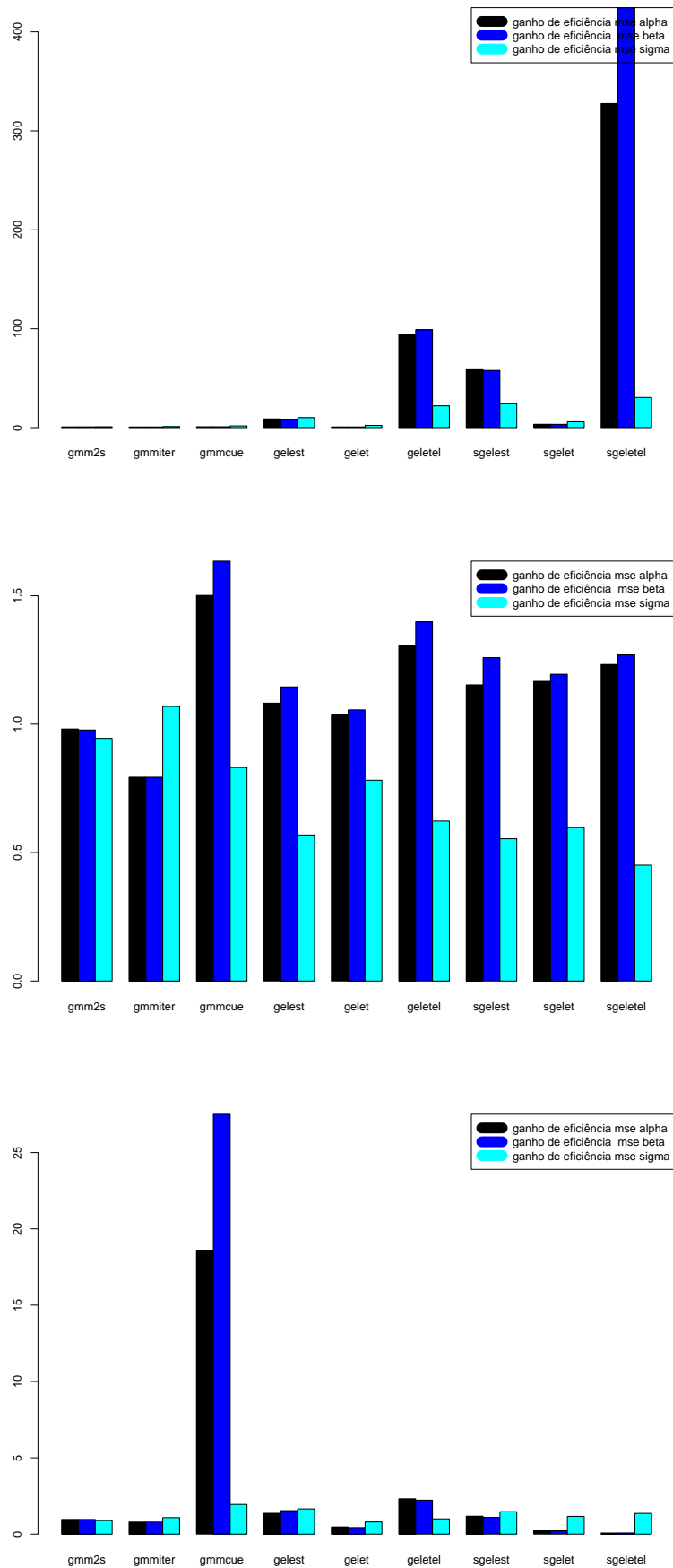
Os resultados deste experimento estão colocados nas Tabelas 25, 26 e 27 para o conjunto de 24 momentos e nas Tabelas 28, 29 e 30 para o conjunto de 14 momentos, e os resultados de mse e mae resumidos nas Figuras 5.11 e 5.12.

O padrão observado é de um melhor desempenho dos estimadores baseados em GEL/GMC, em especial os que usam o método de *Exponential Tilting* para o cálculo dos multiplicadores de Lagrange. Por exemplo a razão entre o estimador de α na configuração 3 de parâmetros mostra uma razão entre o mse do estimador de GMM Iterativo e o estimador ET suavizado de 260.7807, evidenciando que as propriedades de robustez desta classe de estimadores são vantajosas na estimação de modelos de volatilidade estocástica. O desempenho destes estimadores é mais notável na situação com a maior persistência na volatilidade, dado pelo vetor 3 de parâmetros.

No entanto não é possível identificar um efeito claro do número de condições de momentos neste experimento, já que os efeitos são semelhantes aos ocorridos nos experimentos anteriores com inovações com caudas pesadas. Conforme pode ser visto na Figura 5.13, que mostra a eficiência relativa entre 14 e 24 condições de momentos, para os vetores 2 e 3 de parâmetros os efeitos do aumento do número de instrumentos representam uma perda de desempenho na maioria dos casos, em especial para a estimação do parâmetro σ .

5.5. Experimento 5 - Outlier de Volatilidade. Na última especificação testada verificamos o efeito de um chamado outlier de volatilidade (Volatility Outlier como chamado em (HOTTA; TSAY, 1998)) na estimação. Neste experimento o processo gerador dos dados é agora dado por:

FIGURA 5.10. Eficiência Relativa - Student-t (4) na Volatilidade - (mse 14 momentos/ mse 24 momentos)



	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.450450	-0.452413	-0.505817	-0.369780	-0.366575	-0.368322	-0.367022	-0.366164	-0.365422
bias α	-0.082450	-0.084413	-0.137817	-0.001780	0.001425	-0.000322	0.000978	0.001836	0.002578
mse α	0.351303	0.524573	0.029065	0.000364	0.000199	0.000283	0.000401	0.000209	0.000378
mae α	0.375102	0.464943	0.140401	0.012881	0.010511	0.012609	0.012380	0.011065	0.012730
mean β	0.939147	0.938991	0.931884	0.950220	0.950221	0.950119	0.950194	0.950278	0.950372
bias β	-0.010853	-0.011009	-0.018116	0.000220	0.000221	0.000119	0.000194	0.000278	0.000372
mse β	0.006482	0.009584	0.000528	0.000007	0.000003	0.000005	0.000006	0.000003	0.000006
mae β	0.050839	0.062913	0.018567	0.001763	0.001325	0.001726	0.001484	0.001256	0.001481
mean σ	0.185589	0.143397	0.208345	0.266704	0.273863	0.263786	0.259905	0.272609	0.259491
bias σ	-0.074411	-0.116603	-0.051655	0.006704	0.013863	0.003786	-0.000095	0.012609	-0.000509
mse σ	0.026369	0.036223	0.003550	0.001492	0.001554	0.001678	0.001966	0.001545	0.002029
mae σ	0.134897	0.165390	0.051706	0.030328	0.032812	0.033478	0.036517	0.033588	0.036596

TABELA 26. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, Outlier Média

	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.227624	-0.232687	-0.156716	-0.177422	-0.167124	-0.166912	-0.178924	-0.168041	-0.169662
bias α	-0.080424	-0.085487	-0.009516	-0.030222	-0.019924	-0.019712	-0.031724	-0.020841	-0.022462
mse α	0.182403	0.256869	0.008321	0.001678	0.000806	0.000916	0.002641	0.000985	0.001197
mae α	0.234099	0.269799	0.031758	0.031825	0.020514	0.020990	0.034853	0.021881	0.024061
mean β	0.969217	0.968663	0.979613	0.976150	0.977225	0.977292	0.975734	0.977080	0.976873
bias β	-0.010783	-0.011337	-0.000387	-0.003850	-0.002775	-0.002708	-0.004266	-0.002920	-0.003127
mse β	0.003380	0.004678	0.000148	0.000025	0.000019	0.000021	0.000044	0.000023	0.000026
mae β	0.031679	0.036386	0.003503	0.004078	0.002851	0.002860	0.004695	0.003064	0.003324
mean σ	0.107893	0.083627	0.145206	0.174273	0.172216	0.163029	0.167475	0.170336	0.162140
bias σ	-0.057807	-0.082073	-0.020494	0.008573	0.006516	-0.002671	0.001775	0.004636	-0.003560
mse σ	0.016458	0.020176	0.002062	0.001507	0.001380	0.001435	0.001771	0.001392	0.001579
mae σ	0.112344	0.127673	0.020619	0.030929	0.029741	0.029958	0.034131	0.029380	0.032292

TABELA 27. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, Outlier Média

	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.606591	-0.573558	-0.538447	-0.687828	-0.625819	-0.706385	-0.774831	-0.809760	-0.733482
bias α	0.129409	0.162442	0.197553	0.048172	0.110181	0.029615	-0.038831	-0.073760	0.002518
mse α	0.584982	0.692991	0.525481	0.080173	0.219997	0.190438	0.116738	0.801588	0.001846
mae α	0.515088	0.569472	0.498117	0.135071	0.306007	0.204829	0.100064	0.469002	0.017395
mean β	0.918228	0.922744	0.927494	0.906621	0.915070	0.905568	0.895372	0.890500	0.902918
bias β	0.018228	0.022744	0.027494	0.006621	0.015070	0.005568	-0.004628	-0.009500	0.002918
mse β	0.010605	0.012582	0.009568	0.001503	0.004040	0.003652	0.002273	0.014845	0.000050
mae β	0.069723	0.077076	0.067698	0.018982	0.041769	0.029291	0.014573	0.064207	0.003939
mean σ	0.248488	0.222641	0.223980	0.323688	0.283371	0.372535	0.363399	0.298043	0.405760
bias σ	-0.114412	-0.140259	-0.138920	-0.039212	-0.079529	0.009635	0.000499	-0.064857	0.042860
mse σ	0.036861	0.047877	0.042372	0.007156	0.016915	0.009111	0.004789	0.025874	0.003402
mae σ	0.159842	0.184737	0.173584	0.065210	0.103195	0.076377	0.049515	0.123514	0.048524

TABELA 28. $\alpha=-0.736$ $\beta=.9$ $\sigma=.3629$, Outlier Média, Subconjunto de Instrumentos

FIGURA 5.11. Experimento 4 - Outlier de Nível, 24 momentos

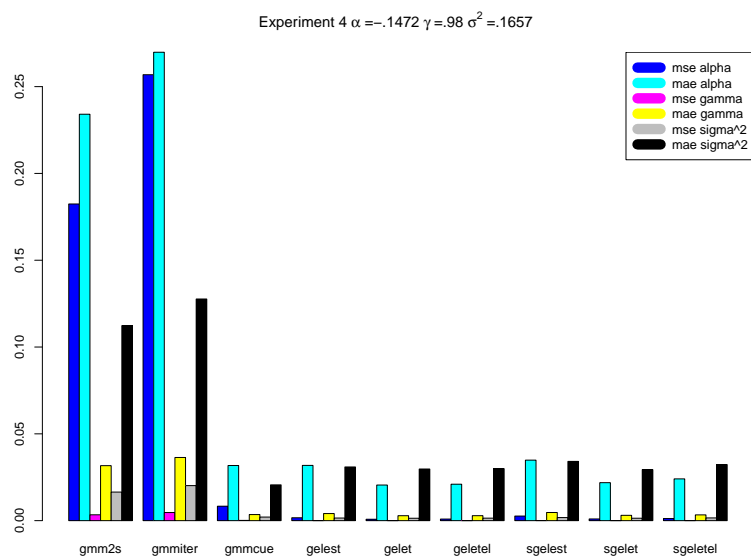
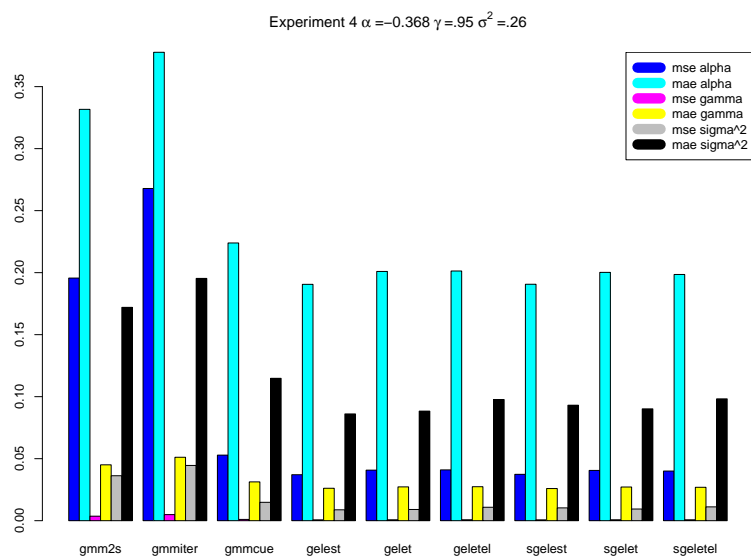
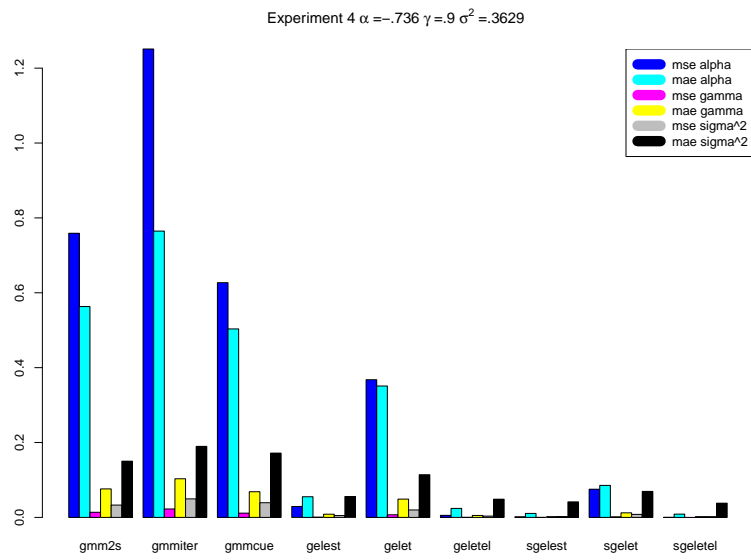
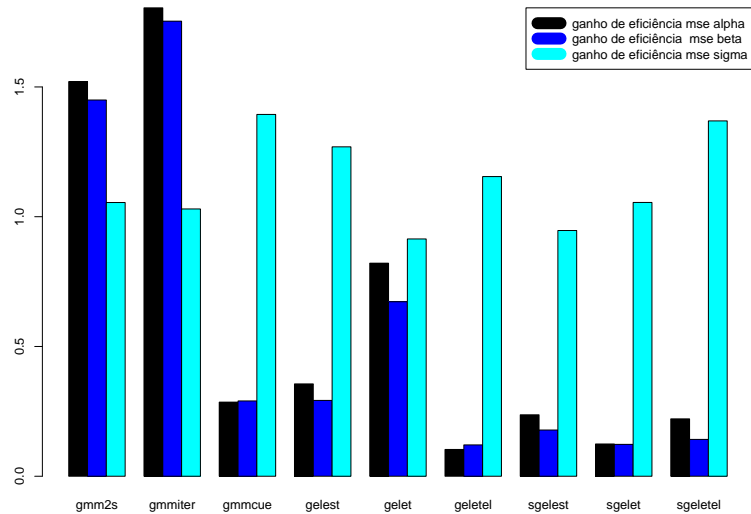
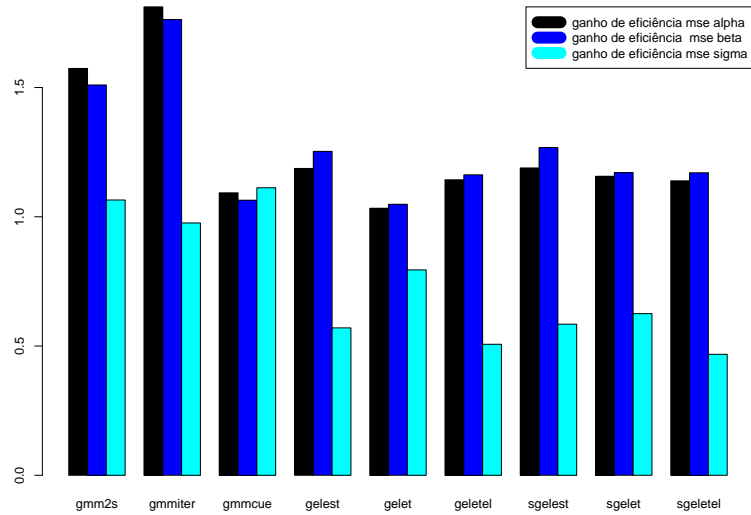
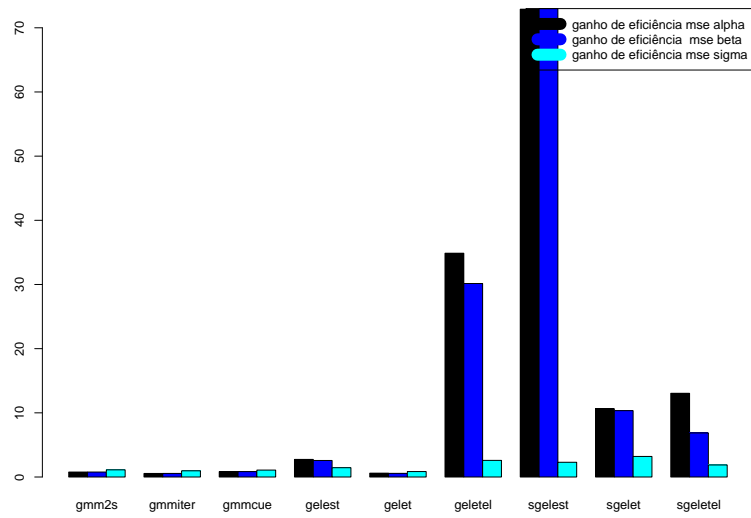


FIGURA 5.13. Eficiência Relativa - Outlier de Nível - (mse 14 momentos/ mse 24 momentos)



	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.335845	-0.330789	-0.386053	-0.370569	-0.360749	-0.366858	-0.372957	-0.362454	-0.367322
bias α	0.032155	0.037211	-0.018053	-0.002569	0.007251	0.001142	-0.004957	0.005546	0.000678
mse α	0.393126	0.447313	0.005856	0.000258	0.000216	0.000272	0.000349	0.000100	0.000117
mae α	0.346897	0.376404	0.033920	0.009525	0.010960	0.010322	0.012304	0.007358	0.006922
mean β	0.954821	0.955542	0.948156	0.950982	0.951276	0.950536	0.951031	0.950969	0.950638
bias β	0.004821	0.005542	-0.001844	0.000982	0.001276	0.000536	0.001031	0.000969	0.000638
mse β	0.007061	0.008069	0.000095	0.000009	0.000006	0.000008	0.000010	0.000003	0.000005
mae β	0.046834	0.050766	0.004224	0.002083	0.001983	0.001981	0.002292	0.001400	0.001500
mean σ	0.163024	0.146836	0.230379	0.288998	0.270922	0.285684	0.288388	0.284835	0.293978
bias σ	-0.096976	-0.113164	-0.029621	0.028998	0.010922	0.025684	0.028388	0.024835	0.033978
mse σ	0.028388	0.034878	0.002244	0.001811	0.001298	0.001837	0.001679	0.001516	0.002272
mae σ	0.143643	0.161651	0.031444	0.032089	0.028832	0.032401	0.031920	0.031852	0.036552

TABELA 29. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, Outlier Média, Subconjunto de Instrumentos

	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.188493	-0.208328	-0.132164	-0.159277	-0.163758	-0.151777	-0.158373	-0.151709	-0.154944
bias α	-0.041293	-0.061128	0.015036	-0.012077	-0.016558	-0.004577	-0.011173	-0.004509	-0.007744
mse α	0.277367	0.463592	0.002377	0.000597	0.000662	0.000095	0.000625	0.000122	0.000265
mae α	0.217575	0.248036	0.026094	0.016203	0.017784	0.005898	0.015817	0.006516	0.010448
mean β	0.974756	0.972189	0.982451	0.979374	0.977933	0.979646	0.979411	0.979550	0.979339
bias β	-0.005244	-0.007811	0.002451	-0.000626	-0.002067	-0.000354	-0.000589	-0.000450	-0.000661
mse β	0.004900	0.008202	0.000043	0.000007	0.000013	0.000003	0.000008	0.000003	0.000004
mae β	0.029199	0.033214	0.003226	0.001859	0.002529	0.001038	0.001722	0.001228	0.001289
mean σ	0.100210	0.092477	0.140692	0.196440	0.181443	0.192532	0.189730	0.189435	0.196667
bias σ	-0.065490	-0.073223	-0.025008	0.030740	0.015743	0.026832	0.024030	0.023735	0.030967
mse σ	0.017358	0.020779	0.002875	0.001913	0.001262	0.001657	0.001677	0.001469	0.002163
mae σ	0.115406	0.125359	0.025701	0.033128	0.027601	0.030217	0.027776	0.029240	0.034699

TABELA 30. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, Outlier Média, Subconjunto de Instrumentos

$$(5.3) \quad y_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$(5.4) \quad \log \sigma_t^2 = \alpha + \beta \log \sigma_{t-1}^2 + \sigma u_t + VO_t,$$

onde VO_t é uma variável binária com valor positivo de 5 desvios padrões na observação 251 da equação de volatilidade e zero nas demais observações. Nesta situação existe uma propagação direta dos efeitos do outlier na volatilidade, já que agora o efeito é diretamente transmitido pela estrutura autoregressiva na equação da volatilidade, enquanto o efeito era indireto no caso de um outlier de inovação.

As Tabelas 31, 32 e 33 (estimação com 24 momentos) e 34, 35 e 36 (estimação com 14 momentos) mostram os resultados das estimações, que podem ser sumarizados pelas Figuras 5.14 e 5.15 com os resultados de mse e mae. Da mesma forma que nos experimentos anteriores, os estimadores baseados em GEL/GMC tem em geral um desempenho superior aos métodos baseados em GMM, e mostrando que as mesmas propriedades de robustez continuam valendo nesta situação com outlier de volatilidade, que potencialmente seria mais grave para a estimação dos parâmetros da volatilidade.

	gmm2s	gmmiter	gmmcuc	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.706232	-0.637902	-0.592404	-0.709767	-0.704501	-0.725353	-0.730109	-0.734256	-0.731349
bias α	0.029768	0.098098	0.143596	0.026233	0.031499	0.010647	0.005891	0.001744	0.004651
mse α	0.465434	0.924587	0.469655	0.015619	0.119894	0.004171	0.001127	0.017193	0.000166
mae α	0.454061	0.648185	0.466139	0.043156	0.177426	0.021347	0.011337	0.036012	0.009249
mean β	0.904874	0.914112	0.920234	0.903850	0.903874	0.903045	0.900937	0.900494	0.900896
bias β	0.004874	0.014112	0.020234	0.003850	0.003874	0.003045	0.000937	0.000494	0.000896
mse β	0.008459	0.016728	0.008446	0.000292	0.002275	0.000089	0.000022	0.000323	0.000005
mae β	0.061305	0.087544	0.063305	0.006366	0.024527	0.004016	0.001827	0.005275	0.001637
mean σ	0.256169	0.177301	0.185598	0.363270	0.300050	0.393189	0.400320	0.377173	0.396990
bias σ	-0.106731	-0.185599	-0.177302	0.000370	-0.062850	0.030289	0.037420	0.014273	0.034090
mse σ	0.033791	0.059072	0.049032	0.005121	0.015349	0.003025	0.001967	0.004401	0.001776
mae σ	0.153312	0.214148	0.195515	0.052298	0.097185	0.045333	0.040743	0.051957	0.038353

TABELA 31. $\alpha=-0.736$ $\beta=.9$ $\sigma=.3629$, Outlier Volatilidade

	gmm2s	gmmiter	gmmcuc	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.351970	-0.352200	-0.508979	-0.370434	-0.365920	-0.368212	-0.367283	-0.365273	-0.367459
bias α	0.016030	0.015800	-0.140979	-0.002434	0.002080	-0.000212	0.000717	0.002727	0.000541
mse α	0.334339	0.610981	0.030704	0.001105	0.000219	0.000269	0.000495	0.000259	0.001637
mae α	0.329172	0.438042	0.144810	0.014213	0.011012	0.012832	0.012775	0.011757	0.013554
mean β	0.952649	0.952689	0.931288	0.949823	0.950035	0.949864	0.949897	0.950127	0.949848
bias β	0.002649	0.002689	-0.018712	-0.000177	0.000035	-0.000136	-0.000103	0.000127	-0.000152
mse β	0.005887	0.010844	0.000560	0.000017	0.000003	0.000005	0.000008	0.000004	0.000027
mae β	0.044410	0.059013	0.019272	0.001791	0.001296	0.001651	0.001511	0.001290	0.001593
mean σ	0.158805	0.108873	0.202559	0.269724	0.274544	0.267376	0.265636	0.273019	0.265015
bias σ	-0.101195	-0.151127	-0.057441	0.009724	0.014544	0.007376	0.005636	0.013019	0.005015
mse σ	0.026434	0.040086	0.004335	0.001910	0.001650	0.001972	0.002104	0.001773	0.002085
mae σ	0.138501	0.180479	0.057666	0.033782	0.034282	0.035755	0.037771	0.035826	0.037569

TABELA 32. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, Outlier Volatilidade

	gmm2s	gmmiter	gmmcuc	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.148088	-0.156272	-0.153073	-0.175806	-0.168742	-0.169571	-0.177988	-0.171109	-0.173611
bias α	-0.000888	-0.009072	-0.005873	-0.028606	-0.021542	-0.022371	-0.030788	-0.023909	-0.026411
mse α	0.097686	0.181002	0.001995	0.001490	0.001060	0.001655	0.002637	0.001731	0.002607
mae α	0.179616	0.224732	0.021219	0.029802	0.022380	0.023438	0.034092	0.024905	0.027865
mean β	0.979896	0.978821	0.980121	0.976108	0.976763	0.976686	0.975623	0.976401	0.976064
bias β	-0.000104	-0.001179	0.000121	-0.003892	-0.003237	-0.003314	-0.004377	-0.003599	-0.003936
mse β	0.001817	0.003372	0.000031	0.000025	0.000027	0.000042	0.000047	0.000045	0.000061
mae β	0.024394	0.030485	0.002028	0.004047	0.003334	0.003450	0.004797	0.003721	0.004109
mean σ	0.083003	0.058572	0.150466	0.174770	0.176514	0.168816	0.170293	0.175436	0.167197
bias σ	-0.082697	-0.107128	-0.015234	0.009070	0.010814	0.003116	0.004593	0.009736	0.001497
mse σ	0.015647	0.020630	0.001414	0.001570	0.001758	0.001881	0.001829	0.001875	0.001901
mae σ	0.112508	0.132708	0.015302	0.031762	0.032617	0.032367	0.034844	0.033013	0.033659

TABELA 33. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, Outlier Volatilidade

	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.380933	-0.319525	-0.346457	-0.675964	-0.533546	-0.689775	-0.722365	-0.629596	-0.730389
bias α	0.355067	0.416475	0.389543	0.060036	0.202454	0.046225	0.013635	0.106404	0.005611
mse α	0.400762	0.522664	0.372611	0.053243	0.136697	0.052746	0.017866	0.201125	0.002570
mae α	0.507168	0.583628	0.506768	0.103944	0.263422	0.106389	0.039998	0.254014	0.016877
mean β	0.948491	0.956853	0.953213	0.908027	0.927169	0.907076	0.902300	0.914907	0.902072
bias β	0.048491	0.056853	0.053213	0.008027	0.027169	0.007076	0.002300	0.014907	0.002072
mse β	0.007406	0.009648	0.006851	0.000982	0.002507	0.001024	0.000334	0.003711	0.000057
mae β	0.068937	0.079200	0.068915	0.014429	0.035831	0.015276	0.005944	0.034862	0.003113
mean σ	0.183818	0.142762	0.161442	0.338956	0.248977	0.380012	0.374279	0.283110	0.396593
bias σ	-0.179082	-0.220138	-0.201458	-0.023944	-0.113923	0.017112	0.011379	-0.079790	0.033693
mse σ	0.052152	0.071179	0.060068	0.008752	0.025916	0.006950	0.004083	0.023850	0.002701
mae σ	0.200869	0.239498	0.218347	0.070212	0.132413	0.064921	0.048370	0.118879	0.043555

TABELA 34. $\alpha=-0.736$ $\beta=.9$ $\sigma=.3629$, Outlier Volatilidade, Subconjunto de Instrumentos

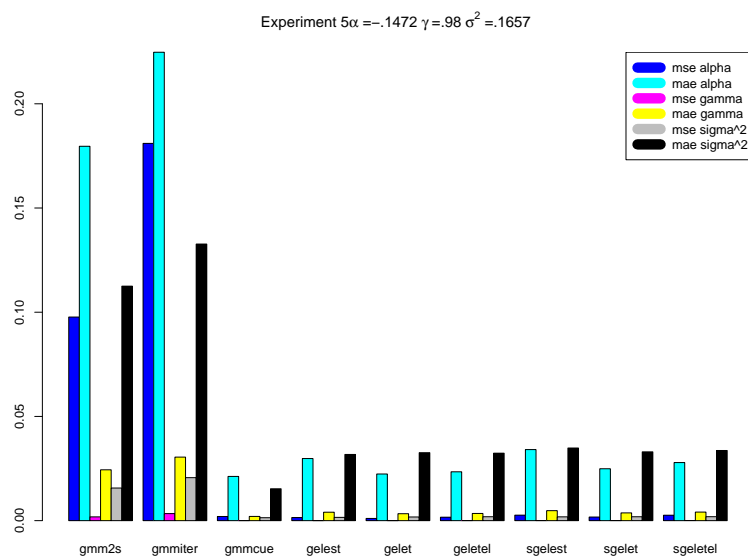
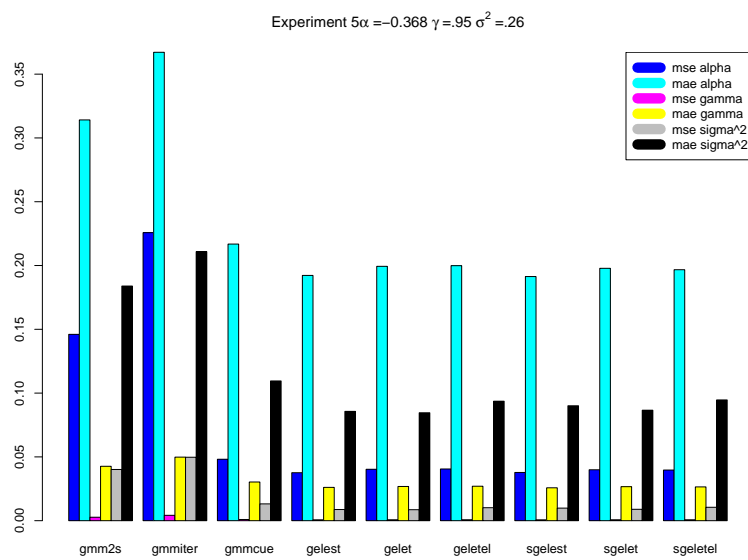
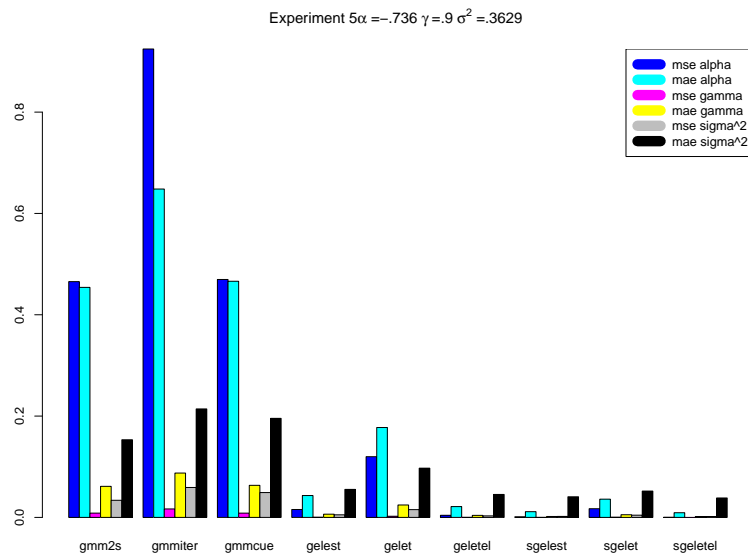
	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.172707	-0.155808	-0.416848	-0.371238	-0.360159	-0.366675	-0.372505	-0.361854	-0.366928
bias α	0.195293	0.212192	-0.048848	-0.003238	0.007841	0.001325	-0.004505	0.006146	0.001072
mse α	0.205893	0.235857	0.008678	0.000264	0.000227	0.000177	0.000371	0.000112	0.000124
mae α	0.315813	0.339617	0.063105	0.010417	0.011081	0.008793	0.012457	0.007730	0.007175
mean β	0.976594	0.978933	0.943591	0.950694	0.951035	0.950248	0.950705	0.950765	0.950356
bias β	0.026594	0.028933	-0.006409	0.000694	0.001035	0.000248	0.000705	0.000765	0.000356
mse β	0.003823	0.004361	0.000162	0.000008	0.000005	0.000005	0.000009	0.000003	0.000005
mae β	0.042912	0.046096	0.008475	0.002108	0.001795	0.001665	0.002122	0.001287	0.001475
mean σ	0.104251	0.082372	0.217374	0.293798	0.272302	0.287402	0.288896	0.283725	0.295915
bias σ	-0.155749	-0.177628	-0.042626	0.033798	0.012302	0.027402	0.028896	0.023725	0.035915
mse σ	0.036282	0.044006	0.003188	0.002233	0.001357	0.001832	0.001810	0.001541	0.002494
mae σ	0.172382	0.192864	0.044066	0.036650	0.029614	0.032069	0.032802	0.032286	0.038483

TABELA 35. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, Outlier Volatilidade, Subconjunto de Instrumentos

	gmm2s	gmmiter	gmmcue	gelest	gelet	geletel	sgelest	sgelet	sgeletel
mean α	-0.087077	-0.083241	-0.151294	-0.158665	-0.161511	-0.153171	-0.158281	-0.152353	-0.153574
bias α	0.060123	0.063959	-0.004094	-0.011465	-0.014311	-0.005971	-0.011082	-0.005153	-0.006374
mse α	0.113590	0.127431	0.014150	0.000588	0.000775	0.000351	0.000671	0.000194	0.000245
mae α	0.162835	0.170595	0.028076	0.015739	0.016077	0.007695	0.014863	0.006753	0.009692
mean β	0.988190	0.988723	0.980057	0.979187	0.977970	0.979248	0.979189	0.979258	0.979384
bias β	0.008190	0.008723	0.000057	-0.000813	-0.002030	-0.000752	-0.000811	-0.000742	-0.000616
mse β	0.002128	0.002384	0.000221	0.000010	0.000019	0.000009	0.000010	0.000005	0.000004
mae β	0.022082	0.023135	0.003205	0.001995	0.002513	0.001365	0.001746	0.001348	0.001257
mean σ	0.057910	0.048059	0.148996	0.197172	0.182484	0.192340	0.190732	0.192244	0.199407
bias σ	-0.107790	-0.117641	-0.016704	0.031472	0.016784	0.026640	0.025032	0.026544	0.033707
mse σ	0.018145	0.020719	0.001930	0.002109	0.001506	0.001826	0.001733	0.001906	0.002436
mae σ	0.125675	0.135012	0.018445	0.034274	0.029489	0.030313	0.028883	0.032819	0.037243

TABELA 36. $\alpha=-0.368$ $\beta=.95$ $\sigma=.26$, Outlier Volatilidade, Subconjunto de Instrumentos

FIGURA 5.14. Resultados - Outlier de Volatilidade - 24 momentos



O efeito do maior número de instrumentos nesta situação pode ser visto na Figura 5.16, que indica que existe um ganho de eficiência com um maior número de instrumentos na situação com a menor persistência, mas para situações com maior persistência na volatilidade os instrumentos adicionais representam em geral piores notáveis no mse dos estimadores.

6. CONCLUSÕES

Neste artigo discutimos a estimação de modelos de volatilidade estocástica através de estimadores baseados em generalizações dos métodos de verossimilhança empírica e mínimo contraste. O desempenho destes estimadores, como mostrado por um conjunto de experimentos de Monte Carlo, se mostrou superior aos métodos de estimação baseados em métodos de momentos generalizados, e também superiores aos métodos baseados em simulação como Markov Chain Monte Carlo e Monte Carlo Maximum Likelihood estudados em (TAKADA, 2009).

Os resultados obtidos são consistentes com os obtidos por outros estudos (e.g. (NEWHEY; SMITH, 2004)), que mostram que estimadores alternativos baseados em momentos, formulados como estimadores baseados em GEL/GMC conseguem um desempenho superior anulando os problemas de viés existentes nos estimadores usuais de GMM. Os estimadores propostos conseguem propriedades superiores em amostras finitas pelo melhor uso do conteúdo informacional existente nas condições de momentos, já que a maior eficiência é alcançada não somente ponderando-se pela variância dos estimadores, como no caso de estimadores GMM, mas também pela estimação não-paramétrica da função de verossimilhança do processo, como discutido em (ANTOINE; BONNAL; RENAULT, 2007), o que permite atingir propriedades de eficiência semi-paramétrica no sentido de (BICKEL et al., 1993). Uma outra propriedade relacionada está no fato de que o viés destes estimadores não cresce com o número de condições de momentos, como no caso de estimadores de métodos de momentos generalizados, e assim é possível alcançar propriedades de eficiência através do uso de um número adequado de condições de momentos. Note que esta característica pode ser especialmente importante na estimação de modelos de volatilidade estocástica multivariada, em que o número de condições de momentos é proporcional ao número de séries estudadas. Como a estimação de modelos multivariados de volatilidade estocástica ainda representa um desafio computacional grande (e.g. (CHIB; OMORI; ASAI, 2009)), a estimação por métodos baseados em verossimilhança empírica/mínimo contraste pode ser uma alternativa eficiente a ser explorada.

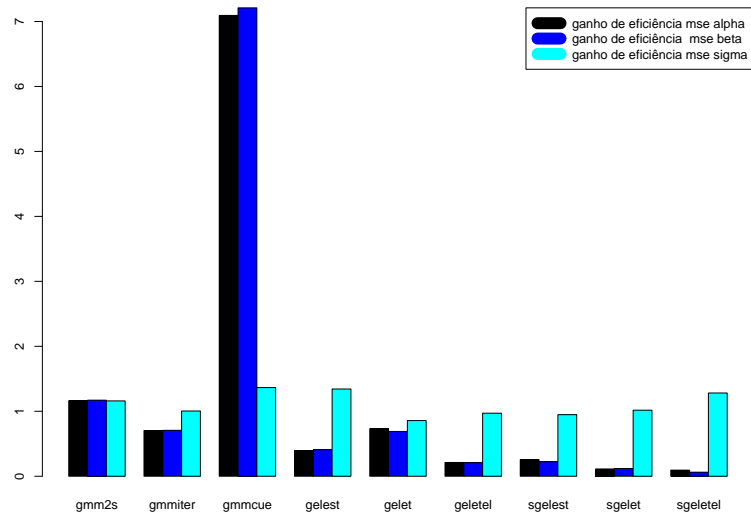
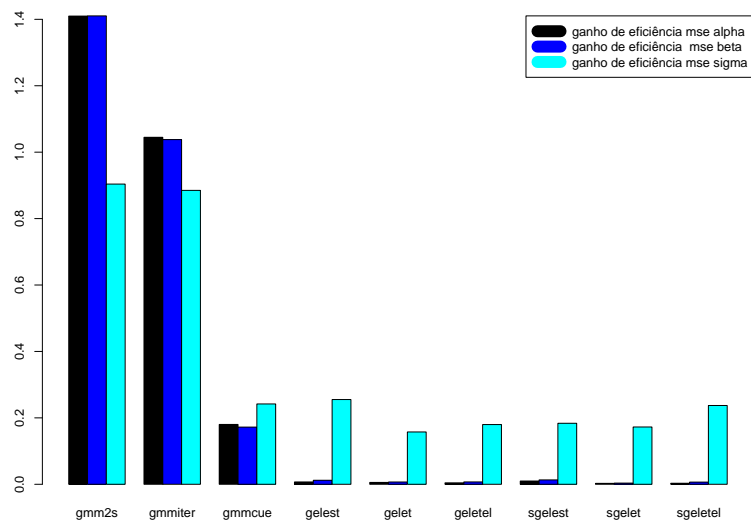
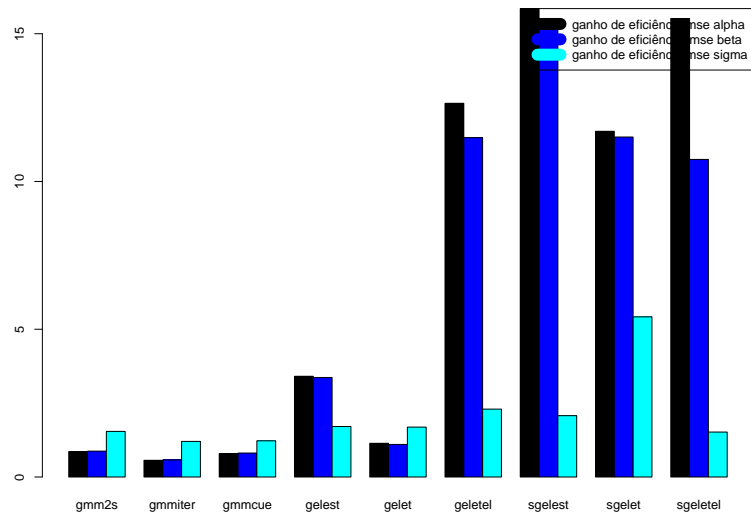
Estes resultados são especialmente interessantes já que a implementação dos métodos discutidos neste artigo é computacionalmente mais simples que a de métodos baseados em simulação, bastando apenas uma especificação das condições de momentos dos processos de volatilidade estocástica. Embora o estudo deste artigo esteja baseada na especificação do modelo log-normal de volatilidade estocástica, é importante notar que este procedimento pode ser generalizado através de metodologia proposta por (MEDDAHI, 2001) que permite a geração automática de condições de momentos para processos que fazem parte da chamada família SV-autofunções.

Outra característica importante está relacionada a propriedades de robustez a problemas de especificação, em especial dos métodos baseados em *Exponential Tilting*, que devido a propriedades em sua função de influência conseguem ser \sqrt{n} consistentes mesmo na presença de problemas de especificação. Esta propriedade é especialmente importante na presença de processos de inovação com caudas pesadas, como verificado neste estudo através do uso de uma distribuição Student-t com curtose não finita ou então na presença de outliers de nível e volatilidade.

REFERÊNCIAS

- ANATOLYEV, S. Gmm, gel, serial correlation and asymptotic bias. *Econometrica*, v. 73, p. 983–1002, 2005.
- ANDERSEN, T. Stochastic autoregressive volatility: A framework for volatility modelling. *Mathematical Finance*, v. 4, p. 75–102, 1994.
- ANDERSEN, T.; SORENSEN, B. Gmm estimation of a stochastic volatility model: A monte carlo study. *Journal of Business and Economic Statistics*, v. 14(3), p. 328–352, 1996.
- ANDREWS, D. W. K. Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation. *Econometrica*, v. 59, p. 817–858, 1991.
- ANTOINE, B.; BONNAL, H.; RENAULT, E. On the efficient use of the informational content of estimating equations: implied probabilities and euclidian empirical likelihood. *Journal Of Econometrics*, v. 138, p. 461–487, 2007.
- BARNDORFF-NIELSEN, O. E.; NOCLATO, E.; SHEPHARD, N. G. Some recent developments in stochastic volatility modelling. *Quantitative Finance*, v. 2, p. 11–23, 2002.
- BICKEL, P. et al. *Efficient and Adaptive Estimation for Semiparametric Models*. [S.l.]: Johns Hopkins Press, 1993.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, v. 32, p. 307–327, 1986.
- BROTO, C.; E., R. Estimation methods for stochastic volatility methods: A survey. *Journal of Economic Surveys*, v. 18(5), p. 613–649, 2004.

FIGURA 5.16. Eficiência Relativa - Outlier de Volatilidade - (mse 14 momentos/ mse 24 momentos)



- CHIB, S.; OMORI, Y.; ASAI, M. Handbook of financial time series. In: _____. [S.l.]: Springer, 2009. cap. Multivariate Stochastic Volatility Models, p. 365–402.
- DASGUPTA, A. *Asymptotic Theory of Statistics and Probability*. [S.l.]: Springer, 2008.
- ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, v. 50, p. 987–1007, 1982.
- FRANCO, C.; ZAKOÏAN, J. M. Linear-representation bases estimation of stochastic volatility models. *Scandinavian Journal of Statistics*, v. 33, p. 785–806, 2006.
- GALLANT, R. A.; TAUCHEN, G. Which moments to match. *Econometric Theory*, v. 12(4), p. 657–681, 1996.
- GEWEKE, J. Bayesian comparison of econometric models. Federal Reserve of Minneapolis Working Paper, 1994.
- GHYSELS, E.; HARVEY, A. C.; RENAULT, E. Statistical methods in finance. In: _____. [S.l.]: North Holland, 1996. cap. Stochastic Volatility, p. 221–238.
- GOURIEROUX, C. A.; MONFORT, A.; RENAULT, E. Indirect inference. *Journal of Applied Econometrics*, v. 8, p. 85–118, 1993.
- HALL, A. *Generalized Method of Moments*. [S.l.]: Oxford University Press, 2005.
- HAMPEL, F. R. et al. *Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1986.
- HANSEN, L. P. Large sample properties of Generalized Method of Moments estimators. *Econometrica*, v. 50, p. 1029–1054, jul. 1982.
- HANSEN, L. P.; HEATON, J.; YARON, A. Finite sample properties of some alternative gmm estimators. *Journal of Business and Economic Statistics*, v. 14, p. 262–280, 1996.
- HARVEY, A. C.; E., R.; SHEPHARD, N. G. Multivariate stochastic variance models. *Review of Economic Studies*, v. 61, p. 247–264, 1994.
- HOTTA, L.; TSAY, R. Outliers in garch processes. Working Paper, Graduate School of Business, University of Chicago, 1998.
- HUBER, P. J. *Robust Statistics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1981.
- IMBENS, G. W.; SPADY, R. H.; JOHNSON, P. Information theoretic approaches to inference in moment conditions models. *Econometrica*, v. 66, p. 333–357, 1998.
- JACQUIER, E.; POLSON, N.; ROSSI, P. E. Bayesian analysis of stochastic volatility models (with discussions). *Journal of Business and Economic Statistics*, v. 12, p. 371–314, 1994.
- JUNGBACKER, B.; KOOPMAN, S. J. Handbook of financial time series. In: _____. [S.l.]: Springer, 2009. cap. Parameter Estimation and Practical Aspects of Modeling Stochastic Volatility, p. 313–344.
- KIEFER, J.; WOLFOWITZ, J. Consistency of maximum likelihood estimator in the presence of infinitely many parameters. *Annals of Mathematical Statistics*, v. 27, p. 887–906, 1956.
- KITAMURA, Y. Empirical likelihood methods in econometrics: Theory and practice. Unpublished Working Paper, 2006.
- KITAMURA, Y.; STUTZER, M. An information-theoretic alternative to generalized method of moments estimation. *Econometrica*, v. 65(5), p. 861–874, 1997.
- KOOPMAN, S. J.; JUNGBACKER, B.; HOL, E. Forecasting daily variability of the s&p 100 stock index using historical, realised and implied volatility measurements. *Journal of Empirical Finance*, v. 12, p. 445–475, 2005.
- LIESENFELD, R.; RICHARD, J. Univariate and multivariate stochastic volatility models: Estimation and diagnostics. *Journal of Empirical Finance*, v. 10, p. 505–531, 2003.
- MCNEIL, A.; FREY, R.; EMBRECHTS, P. *Quantitative Risk Management*. [S.l.]: Princeton University Press, 2005.
- MEDDAHI, N. An eigenfunction approach for volatility modelling. Working Paper, University of Montreal, 2001.
- MELINO, A.; TURNBULL, S. M. Pricing foreign currency options with stochastic volatility. *Journal Of Econometrics*, v. 45, p. 239–265, 1990.
- MONFARDINI, C. Estimating stochastic volatility models through indirect inference. *Econometrics Journal*, v. 1, p. 113–128, 1998.
- NEWBY, W.; MCFADDEN, D. Handbook of econometrics. In: _____. [S.l.]: Elsevier, 1994. v. 4, cap. Large sample estimation and hypothesis testing.
- NEWBY, W.; SMITH, R. J. High-order properties of gmm and generalized empirical likelihood estimators. *Econometrica*, v. 72, p. 219–255, 2004.
- NEWBY, W. K.; WEST, K. D. A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica*, v. 55, p. 703–708, 1987.
- OWEN, A. Empirical likelihood for linear models. *The Annals of Statistics*, v. 18(1), p. 1725–1747, 1991.
- QIN, J.; LAWLESS, J. Empirical likelihood and general estimating equations. *The Annals of Statistics*, v. 20(1), p. 300–325, 1994.
- RENAULT, E. Handbook of financial time series. In: _____. [S.l.]: Springer, 2009. cap. Moment-Based Estimation of Stochastic Volatility Models, p. 269–311.
- RUIZ, E. Quasi-maximum likelihood estimation of stochastic volatility models. *Journal Of Econometrics*, v. 63, p. 284–306, 1994.
- SCHENNACH, S. Point estimation with exponentially tilted empirical likelihood. *Annals of Statistics*, v. 35(2), p. 634–672, 2007.
- SHEPARD, N.; ANDERSEN, T. Handbook of financial time series. In: _____. [S.l.]: Springer, 2009. cap. Stochastic Volatility: Origins and Overview, p. 233–254.
- SHEPARD, N. G. Fitting non-linear time series models, with applications to stochastic variance models. *Journal of Applied Econometrics*, v. 8, p. 135–152, 1993.
- SINGLETON, K. J. *Empirical Dynamic Asset Pricing*. [S.l.]: Princeton University Press, 2006.
- SMITH, R. J. Gel criteria for moment conditions models. Working Paper, University of Bristol, 2001.
- TAKADA, T. Simulated minimum hellinger distance estimation of stochastic volatility models. *Computational Statistics and Data Analysis*, v. 53, p. 2390–2403, 2009.

ESTIMAÇÃO DE MODELOS DE VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA USANDO MÉTODOS DE VEROSSIMILHANÇA EMPÍRICA

TAYLOR, S. J. *Modelling Financial Time Series*. [S.l.]: John Wiley& Sons, 1986.

WHITE, H. Maximum likelihood estimation of misspecified models. *Econometrica*, v. 50, p. 1–25, 1982.